



МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРУЮЩЕГО И СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРОВ

Г. А. Фокин*

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

*Адрес для переписки: grihafokin@gmail.com

Аннотация—Формирующая фильтрация на передаче и согласованная фильтрация на приеме являются одними из основных этапов обработки цифровых сигналов, непосредственно влияющими на помехоустойчивость их приема, поэтому разработанные в настоящей работе модели представляют определенный методический интерес, актуальность которого подтверждается продолжающейся в последние годы тенденцией реализации процедур передачи, приема и обработки сигналов средствами модельно-ориентированного проектирования и программно-конфигурируемого радио. Представленная работа содержит скрипты синтеза формирующего и согласованного фильтров с заданными характеристиками для последующей программной реализации имитационных моделей оценки помехоустойчивости современных и перспективных систем мобильной связи и радиодоступа. Формализация известных математических моделей межсимвольной интерференции и фильтра Найквиста для ее исключения сопровождаются скриптами в среде Matlab для построения и визуализации его импульсных и частотных характеристик. Реализованный программный инструментариум позволяет оценивать влияние коэффициента сглаживания и ограничения длины импульсной характеристики, а также визуализировать ширину спектра сигнала в частотном домене и его искажения по глазковой диаграмме во временном домене. **Предмет исследования.** Статья посвящена моделированию формирующих и согласованных фильтров и оценке их импульсных и частотных характеристик. **Метод.** Формализация математических моделей межсимвольной интерференции и фильтра Найквиста служат задаче разработки скриптов в среде Matlab для синтеза фильтра типа «корня из приподнятого косинуса» с заданным ограничением длины импульсной характеристики. **Основные результаты.** В статье разработан комплекс скриптов синтеза заданных импульсных и частотных характеристик формирующего и согласованного фильтров для последующей программной реализации имитационных моделей оценки помехоустойчивости современных и перспективных систем мобильной связи и радиодоступа в среде Matlab. **Практическая значимость.** Разработанный комплекс скриптов Matlab позволяет синтезировать фильтры с заданными характеристиками, а также иллюстрирует пути поиска компромисса между требуемым ограничением полосы по частотной характеристике и помехоустойчивостью приема и синхронизации по результирующей глазковой диаграмме.

Ключевые слова—межсимвольная интерференция, фильтр Найквиста, формирующий и согласованный фильтры, фильтр типа «приподнятый косинус», импульсная и частотная характеристики, коэффициент сглаживания, глазковая диаграмма.

Информация о статье

УДК 621.396

Язык статьи – русский.

Поступила в редакцию 21.04.2021, принята к печати 28.07.2021.

Ссылка для цитирования: Фокин Г. А. Моделирование формирующего и согласованного фильтров // Информационные технологии и телекоммуникации. 2021. Том 9. № 2. С. 77–94. DOI 10.31854/2307-1303-2021-9-2-77-94.



MODELING OF THE PULSE SHAPING AND MATCHED FILTERS

G. Fokin*

The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

*Corresponding author: grihafokin@gmail.com

Abstract—Pulse shaping filtering on transmission and matched filtering on reception are one of the main stages of digital signal processing that directly affect the noise immunity of their reception, therefore, the models, developed in this work, are of certain methodological interest, the relevance of which is confirmed by continuing in the last years trend of implementing procedures for transmitting, receiving and processing signals by means of model-based design and software-defined radio. The presented work contains scripts for the synthesis of the pulse shaping and matched filters with given characteristics for the subsequent software implementation of simulation models for assessing the noise immunity of modern and future mobile communication and radio access systems. The formalization of the known mathematical models of intersymbol interference and the Nyquist filter for its elimination are accompanied by scripts in the Matlab environment for constructing and visualizing its impulse and frequency characteristics. The implemented software toolkit makes it possible to evaluate the influence of the smoothing coefficient and limiting the length of the impulse response, as well as to visualize the width of the signal spectrum in the frequency domain and its distortion by the eye diagram in the time domain.

Keywords—intersymbol interference, Nyquist filter, shaping and matched filters, raised cosine filter, impulse and frequency response, roll-off factor, eye diagram.

Article info

Article in Russian.

Received 21.04.2021, accepted 28.07.2021.

For citation: Fokin G.: Modeling of the pulse shaping and matched filters // Telecom IT. 2021. Vol. 9. Iss. 2. pp. 77–94 (in Russian). DOI 10.31854/2307-1303-2021-9-2-77-94.



Введение

Вопросы теоретического и прикладного характера в части построения и функционирования формирующих и согласованных фильтров на сегодняшний день являются достаточно хорошо изученными¹ [1, 2, 3] и представляют неотъемлемую часть ставших уже классическими основополагающих курсов по принципам и технологиям цифровой связи [2, 3]. В то же время нельзя не отметить, что специфические вопросы, хорошо знакомые непосредственным разработчикам практических алгоритмов и процедур обработки сигналов на физическом уровне систем радиосвязи, остаются за рамками образовательных курсов по соответствующим дисциплинам. Однако с развитием новых парадигм модельно-ориентированного проектирования и программно-конфигурируемого радио, в том числе в сфере образования [4], данные пробелы подлежат объективному устранению. Среди специфических особенностей, связанных с функционированием формирующих и согласованных фильтров, заслуживают внимания вопросы уточнения влияния усечения длины и коэффициента сглаживания импульсной характеристики на показатели занимаемой ширины полосы частот сигнала на выходе фильтра в частотной области, а также помехоустойчивости подсистемы синхронизации, визуализируемой глазковой диаграммой, во временной области. В настоящей статье представлены известные математические модели, а также сопровождающие их авторские имитационные модели, разработанные в среде Matlab, методической целью которых является визуализация частотно-временных характеристик формирующих и согласованных фильтров для оценки их применимости по критерию занимаемой полосы в частотном домене и потенциалу синхронизации по глазковой диаграмме во временном домене.

1 Использование формирующих фильтров

При передаче цифровых сигналов по радиоканалу остро встает необходимость ограничения их полосы, однако, при сужения полосы возникает так называемая межсимвольная интерференция (МСИ) [1]. Для поддержания допустимой МСИ при ограничении полосы цифровых сигналов используются формирующие фильтры [2]. Если исходным цифровым сигналом является набор импульсов с идеальной прямоугольной формой во временном домене, то спектр такого сигнала в частотном домене будет характеризоваться крайне высоким уровнем боковых лепестков, степень ослабления которых является неприемлемо низкой с точки зрения разумного ограничения полосы частот [3]. Если в качестве примера рассмотреть сигнал ФМ-2 (BPSK, *Binary Phase Shift Keying*) с последовательностью импульсов прямоугольной формы $d(t)$ во временном домене (рис. 1, а), в частотном домене в результате операции преобразования Фурье от $d(t)$ будет получен спектр $S(f)$ с шириной главного лепестка, равной удвоенной символьной

¹ Передача цифрового сигнала по узкополосным каналам. Межсимвольная интерференция и формирующие фильтры Найквиста. URL: https://ru.dsplib.org/content/signal_isi/signal_isi.html.



скорости $2R$; ослабление боковых лепестков составит при этом 13 дБ относительно главного лепестка, а степень их ослабления можно аппроксимировать зависимостью $1/f$ (рис. 1, б)².

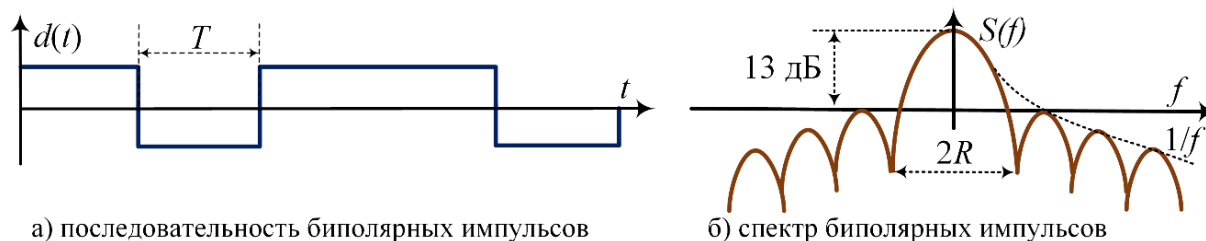


Рис. 1. Частотно-временное представление прямоугольных биполярных импульсов: а) во временном домене б); в частотном домене

Из свойств преобразования Фурье следует, что сужение полосы исходного цифрового сигнала в частотном домене вызывает межсимвольную интерференцию (МСИ, *Intersymbol Interference, ISI*) во временном домене вследствие изменения исходной формы сигналов: импульсы последовательности при сглаживании расширяются, их фронты искажаются и соседние импульсы, утратив прямоугольную форму, начинают накладываться друг на друга (рис. 2).

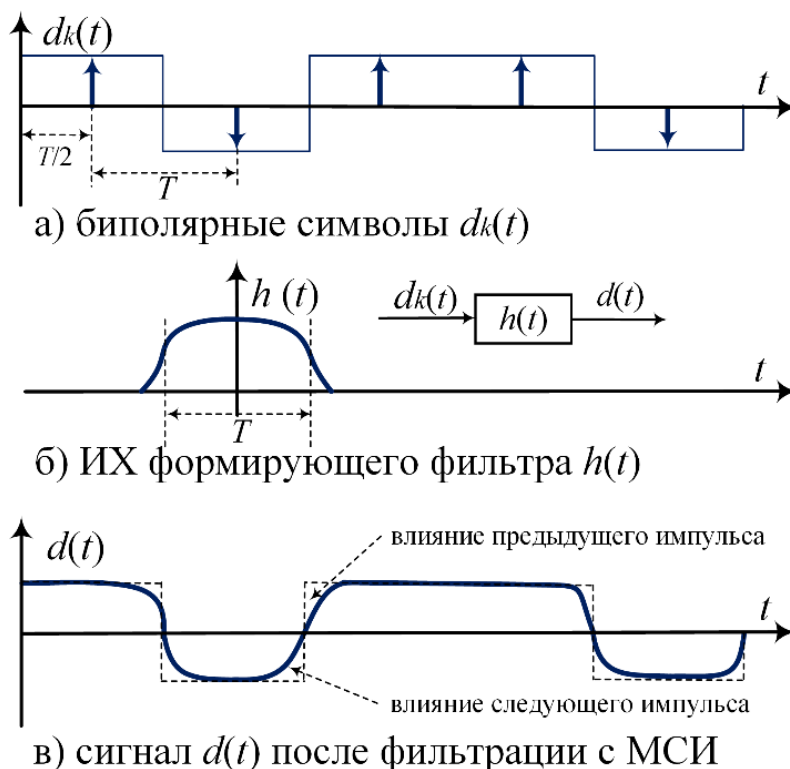


Рис. 2. Происхождение межсимвольной интерференции

² Передача цифрового сигнала по узкополосным каналам. Межсимвольная интерференция и формирующие фильтры Найквиста. URL: https://ru.dsplib.org/content/signal_isi/signal_isi.html.



Рассмотрим в качестве примера отсчеты $d_k(t)$ биполярных прямоугольных импульсов (рис. 2, а), которые для сглаживания формы во временном домене и ограничения полосы в частотном домене поступают на формирующий фильтр с импульсной характеристикой (ИХ) $h(t)$ (рис. 2, б); в результате формирующей фильтрации получается сигнал $d(t)$ (рис. 2, в), который характеризуется наложением соседних символов друг на друга в результате МСИ.

Формализуем математическую модель формирующей фильтрации во временном домене. Допустим, отсчеты передаваемых цифровых сигналов берутся в центре биполярных прямоугольных импульсов длительностью T , тогда сигнал $d_k(t)$ можно представить набором дельта-импульсов, определяемых выражением

$$d_k(t) = \sum_k d_k \cdot \delta(t - kT - T/2), \quad (1)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция, умноженная на амплитуду отсчета d_k , которая для противоположных сигналов ФМ-2 может принимать значения $d_k = \pm 1$. Сигнал $d(t)$ на выходе формирующего фильтра с ИХ $h(t)$ можно представить сверткой $d_k(t)$ и $h(t)$:

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d_k(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

После подстановки выражения (1) в интеграл (2) с использованием свойства дельта-функции получим

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k d_k \delta(\tau - kT - T/2) h(t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_k d_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT - T/2) h(t - \tau) d\tau = \sum_k d_k h(t - kT - T/2). \end{aligned} \quad (3)$$

Из выражения (3) можно сделать следующие выводы:

а) во временном домене сигнал на выходе формирующего фильтра $d(t)$ по своей форме однозначно определяется импульсной характеристикой $h(t)$ и отсчетами исходного цифрового сигнала d_k ;

б) для управления шириной спектра исходного цифрового сигнала d_k в частотной области достаточно выбрать заданную частотную характеристику (ЧХ) формирующего фильтра, которая определяется преобразованием Фурье ИХ $h(t)$ формирующего фильтра³.

2 Модели импульсной и частотной характеристик формирующего фильтра Найквиста

Рассмотрим, какими свойствами должна обладать $h(t)$, чтобы обеспечить минимальную ширину полосы передаваемого сигнала⁴.

К характеристикам формирующего, с точки зрения свойств преобразования Фурье, предъявляются противоречивые требования: с одной стороны, частотная

³ Передача цифрового сигнала по узкополосным каналам. Межсимвольная интерференция и формирующие фильтры Найквиста. URL: https://ru.dsplib.org/content/signal_isi/signal_isi.html.

⁴ Там же.



характеристика $H(f)$ должна обеспечивать сужение спектра исходного цифрового сигнала с $2R$ до (в идеале) символьной скорости R в частотном домене; с другой стороны, импульсная характеристика $h(t)$, как результат обратного преобразования Фурье от $H(f)$, должна обеспечивать хоть и неизбежный, но приемлемый уровень МСИ во временном домене. Модель такого фильтра была предложен Найквистом; формализуем далее его свойства.

При скорости R отсчетов исходного цифрового сигнала $d_k(t)$ длительность информационного символа определяется выражением

$$T = 1/R, \quad (4)$$

а символьную скорость R можно трактовать как частоту дискретизации цифрового сигнала $d(t)$ при условии взятия его отсчетов в центре каждого биполярного импульса (рис. 3, а).

Проблема межсимвольной интерференции, с точки зрения помехоустойчивости, решается при синхронизации и определяется формирующим фильтром на передаче и согласованным фильтром на приеме. Формализуем задачу исключения межсимвольной интерференции при приеме. Пусть k – индекс отсчетов на передающей стороне, i – индекс отсчетов на приемной стороне, тогда для исключения влияния МСИ на приеме необходимо, чтобы $d_i = d_k$. Допустим, после формирующего и сглаживающего фильтра с совокупной импульсной характеристикой $h(t)$ на приеме имеется сигнал $d(t)$. Если приемник осуществляет дискретизацию $d(t)$ в моменты времени $t = T/2 + iT$, для исключения влияния МСИ в узлах дискретизации i должно выполняться условие, при котором принятые символы соответствуют переданным:

$$d(iT + T/2) = d_k. \quad (5)$$

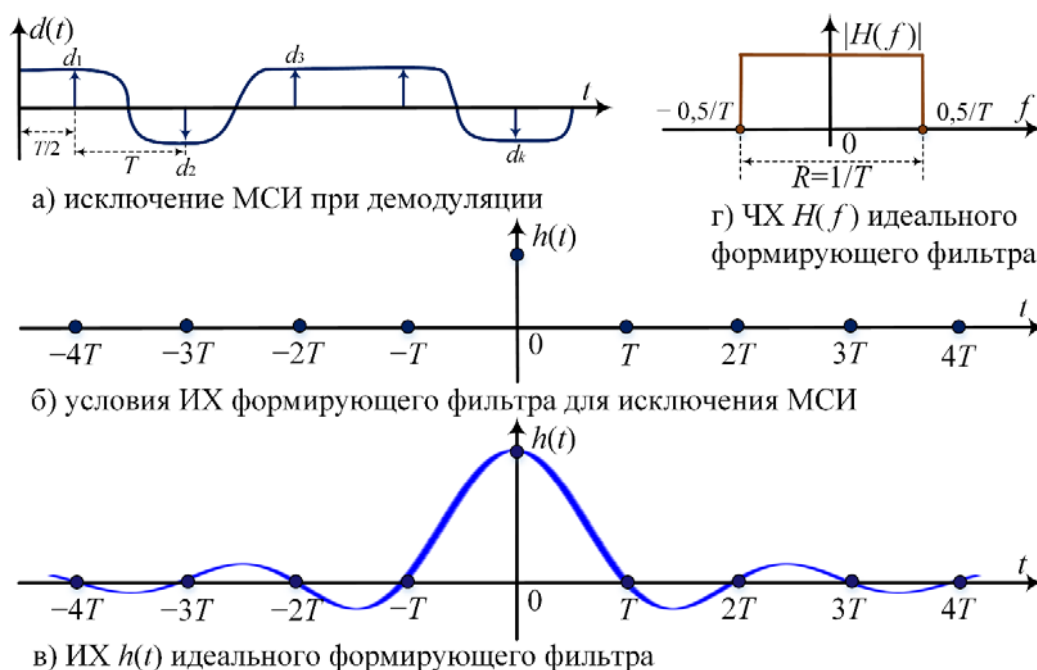


Рис. 3. Импульсная и частотная характеристики формирующего фильтра Найквиста



Из выражения (5) следует, что при изменении формы импульсов цифровых сигналов $d_k(t)$ во временной области в моменты взятия отсчетов необходимо оставлять его значения неизменными и равными d_k , тогда при приеме и синхронизации демодуляция символов $d_k(t)$ может быть реализована без искажений. Из (3) и (5) можем записать:

$$d(iT + T/2) = \sum_k d_k h(iT + T/2 - kT - T/2) = \sum_k d_k h(T(i - k)). \quad (6)$$

Из выражения (5) и (6) следует:

$$d_k = \sum_k d_k h(T(i - k)), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Анализ выражения (7) позволяет формализовать свойство, которым должна обладать импульсная характеристика $h(t)$ для исключения МСИ на приеме:

$$h((i - k)T) = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (8)$$

Условие (8) иллюстрирует рис. 3, б; импульсная $h(t)$ (рис. 3, в) и частотная $H(f)$ (рис. 3, г) характеристики фильтра, удовлетворяющего этому условию, образуют известный фильтр Найквиста. Частотная характеристика фильтра Найквиста, обеспечивающая минимальную ширину полосы, равную символьной скорости $R = 1/T$, является идеальным прямоугольным фильтром нижних частот. ИХ фильтра Найквиста, обеспечивающая минимальную ширину полосы цифрового сигнала, определяется выражением (рис. 3, в):

$$h(t) = \text{sinc}(\pi t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}. \quad (9)$$

ИХ Найквиста (9) характеризуется бесконечными во времени боковыми хвостами со степенью затухания во времени $\sim 1/t$ и является идеальным интерполятором (рис. 4, а), который «соединяет» каждый символ d_k плавной кривой, при этом сами d_k не искажает, так как в моменты дискретизации импульсные характеристики соседних символов, согласно (8), равны нулю, что позволяет полностью исключить МСИ в момент взятия выборок в узлах дискретизации⁵.

Импульсная характеристика Найквиста во временном домене является бесконечной и непосредственно в форме (9) не используется; на практике ИХ $h(t)$ ограничивают (усекают) по длительности; в результате усечения формирующий фильтр перестает быть идеальным интерполятором во временной области, а его ЧХ утрачивает идеальную прямоугольную форму в частотной области (рис. 4, б). При этом, чем больше усечение ИХ во временной области, тем выше уровень боковых лепестков ЧХ в частотной области.

⁵ Передача цифрового сигнала по узкополосным каналам. Межсимвольная интерференция и формирующие фильтры Найквиста. URL: https://ru.dsplib.org/content/signal_isi/signal_isi.html.

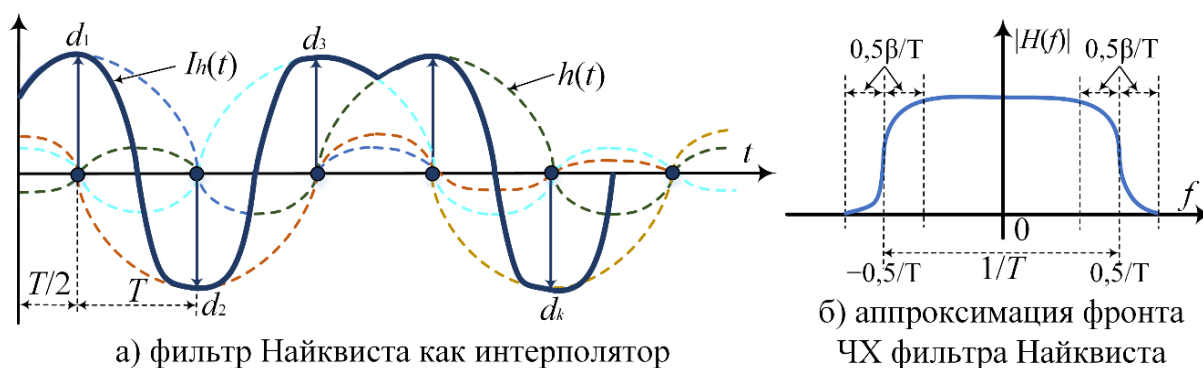


Рис. 4. Аппроксимация ИХ а) и ЧХ б) фильтра Найквиста

Пример ограничения импульсной характеристики (9) показан на рис. 5, а (ИХ ограничена до 10 символов) и рис. 5, б (ИХ ограничена до 4 символов); для получения графиков использован скрипт 1, при этом при усечении используется допущение $h(t_H) = 0$ при $|t_H| > 10$ и $|t_H| > 4$ соответственно. На рис. 5 по оси x ИХ отложено нормированное к длительности символа (4) время $t_H = t/T$, при этом $t_H = 1$ соответствует одному символу, а по оси x ЧХ отложена частота $f_H = f \cdot T$, нормированная длительностью символа (4).

Скрипт 1. ИХ и ЧХ фильтра Найквиста с усечением

```

sps=10; % число выборок на символ
N=4; % число символов
tT=[-10:1/sps:10]; % нормированное время t/T
for i=1:length(tT)
    if abs(tT(i))<N
        ht(i)=sin(pi*tT(i))./(pi*tT(i));
    else
        ht(i)=0;
    end
end
ht(isnan(ht))=1; subplot(2,1,1); plot(tT,ht,'linewidth',2); grid on; axis('tight');
title(['ИХ с учечением до N=',num2str(N),' символов']);
L=length(ht); NFFT=2^nextpow2(L);
hf = fft(ht,NFFT)/L; hf = fftshift(hf); fT=(-NFFT/2:NFFT/2-1)/NFFT*sps;
subplot(2,1,2); plot(fT,10*log10(abs(hf)), 'linewidth',2); grid on;
axis('tight'); title(['ЧХ с учечением до N=',num2str(N),' символов']);

```

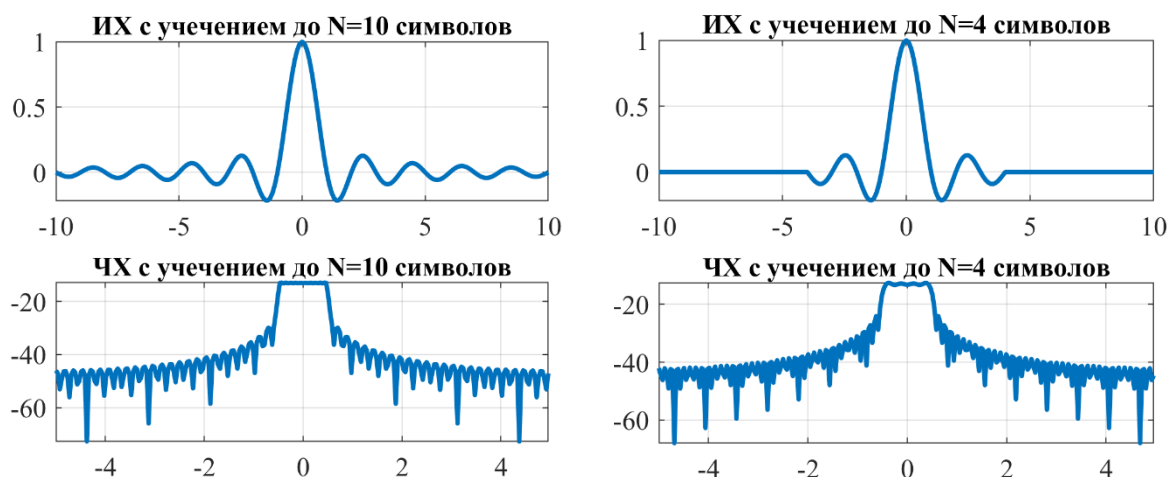



Рис. 5. ИХ/ЧХ фильтра Найквиста с усечением до 10, 4 символов

3 Формирующий фильтр типа «приподнятого косинуса»

Рис. 5 показывает, что усечение ИХ с 10 до 4-х символов приводит к увеличению уровня боковых лепестков ЧХ; также в полосе пропускания начинает проявляться неравномерность ЧХ. Для компенсации этих эффектов в частотной области производится регулируемое параметром β сглаживание ЧХ (рис. 4, б); в результате ЧХ фильтра становится кусочной:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi T}{\beta} \left[|f| - \frac{1-\beta}{2T} \right] \right) \right), & \frac{1-\beta}{2T} < |f| < \frac{1+\beta}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\beta}{2T} \end{cases} \quad (10)$$

и характеризуется двумя величинами: $0 \leq \beta \leq 1$ – коэффициент сглаживания, $T = 1/R$ – период символа. Вблизи фронта идеальная ЧХ аппроксимируется функцией приподнятого косинуса. Параметр сглаживания β характеризует избыточность требуемой полосы относительно символьной скорости $R = 1/T$. Обозначим избыточность полосы относительно R через Δf (рис. 4, б), тогда справедливо:

$$\beta = \frac{\Delta f}{1/T} = \frac{\Delta f}{R} = T \Delta f, \quad (11)$$

где символьная скорость

$$R = 1/T. \quad (12)$$

Сглаживание фронта $H(f)$ в частотном домене соответствует произведению $h(t)$ на весовое окно $w(t)$ во временном домене:



$$h(t) = \text{sinc}(t/T) \cdot w(t); \quad w(t) = \frac{\cos(\pi\beta t/T)}{1-(2\beta t/T)^2} \quad (13)$$

Регулируя коэффициент сглаживания β , можно задавать интервал аппроксимации ЧХ; значение $\beta = 0$ соответствует идеальному ФНЧ

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} |H(f)| = \text{rect}(fT), \quad (14)$$

где $\text{rect}(\cdot)$ прямоугольная функция ЧХ, которой соответствует ИХ $\text{sinc}(t/T)$; значение $\beta = 1$ соответствует ЧХ приподнятого косинуса:

$$|H(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi T f)), & |f| < \frac{1}{T} \\ 0, & |f| > \frac{1}{T} \end{cases} \quad (15)$$

Ширина полосы пропускания фильтра с характеристикой «приподнятый косинус» обычно определяется как ширина ненулевой части спектра:

$$\Delta F = R + \Delta f = R(1 + \beta), \quad (16)$$

Рис. 6 и скрипт 2 иллюстрируют ИХ $h(t_H)$ и ЧХ $|H(f_H)|$ фильтра «приподнятого косинуса» для трех коэффициентов сглаживания β .

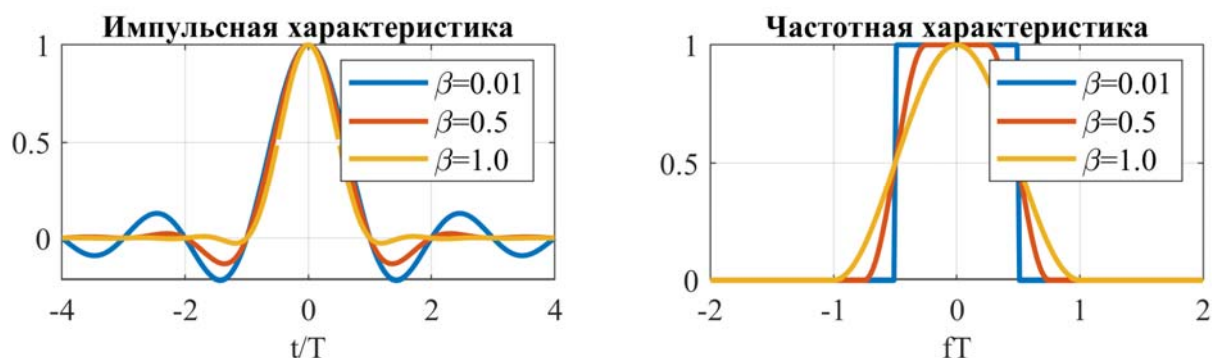


Рис. 6. ИХ и ЧХ фильтра типа «приподнятого косинуса»

Скрипт 2. ИХ и ЧХ фильтра типа «приподнятого косинуса»

```
tT=[-4:0.01:4]; % нормированное время t/T
beta=[0.01 0.5 1.0];
figure(1); subplot(2,1,1);
for i=1:length(beta)
    for j=1:length(tT)
        ht(j)=trrt(tT(j), beta(i));
    end
    plot(tT,ht,'linewidth',2); hold on;
end
legend('beta=0.01', 'beta=0.5', 'beta=1.0'); grid on;
title('Импульсная характеристика'); xlabel('t/T'); axis('tight');
fT=[-2:0.01:2];
```



```

subplot(2,1,2);
for i=1:length(beta)
    for j=1:length(fT)
        hf(j)=frrt(fT(j), beta(i));
    end
    plot(fT,hf,'linewidth',2); hold on;
end
legend('beta=0.01', 'beta=0.0', 'beta=1.0'); grid on;
title('Частотная характеристика'); xlabel('fT'); axis('tight');
% Функция оценки импульсной характеристики
function ht=trrt(tT, beta)
wt=cos(pi*beta*tT)./(1-(2*beta*tT).^2);
ht=sinc(tT).*wt;
end
% Функция оценки частотной характеристики
function hf=frrt(fT, beta)
if abs(fT)<(1-beta)/2
    hf=1;
elseif abs(fT)>(1+beta)/2
    hf=0;
else
    hf=0.5*(1+cos(pi/beta.*(abs(fT)-(1-beta)/2)));
end
end

```

Из анализа графиков ИХ и ЧХ (рис. 6) можно сделать следующие выводы:

- с уменьшением β амплитуда пульсаций ИХ увеличивается, что показывает возможность сужения полосы занимаемых частот за счет удлинения ИХ;
- при $\beta = 0$ частотная характеристика стремится к идеальному ФНЧ с прямоугольной ЧХ (14);
- при $\beta = 1$ ЧХ $|H(f_H)|$ имеет вид приподнятого косинуса (15), а ИХ $h(t_H)$ характеризуется минимальными боковыми лепестками;
- по уровню 0,5 (–3 дБ) полоса фильтра Найквиста постоянна и равна символевой скорости.

4 Формирующий фильтр типа «корень из приподнятого косинуса»

Важным свойством фильтра Найквиста является то, что его ИХ равна нулю в моменты времени, кратные длительности символа kT , где k – целое число. Это свойство позволяет при синхронизации принятых сигналов принимать момент взятия выборки кратным величине kT , что исключает взаимное влияние соседних символов друг на друга. В системах радиосвязи фильтр Найквиста реализуется следующим образом: на передающей стороне модулированные символы проходят через формирующий фильтр с ЧХ $H_T(f) = \sqrt{H(f)}$; на приемной стороне перед синхронизатором принятый сигнал проходит через согласованный фильтр с частотной характеристикой $H_R(f) = \sqrt{H(f)}$; таким образом, совокупная ЧХ определяется произведением

$$H(f) = H_T(f) \cdot H_R(f). \quad (17)$$



Рис. 7 иллюстрирует укрупненную схему передачи, где формирующий фильтр с ЧХ $H_T(f)$ располагается в передатчике, а согласованный фильтр с ЧХ $H_R(f)$ – в приемнике.

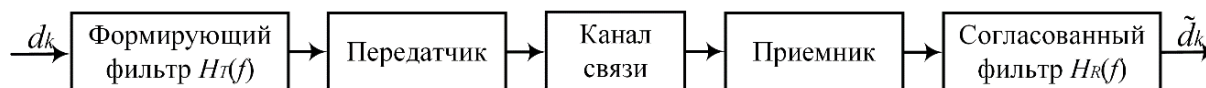


Рис. 7. Формирующий и согласованный фильтры

Допустим, сигнал на входе согласованного фильтра $H_R(f)$ равен сигналу на выходе формирующего фильтра $H_T(f)$ плюс аддитивный белый Гауссов шум (АБГШ), тогда совокупная частотная характеристика приемопередающего тракта $H(f)$ определяется выражением (17). В целях компенсации межсимвольной интерференции в приемопередающем тракте необходимо и достаточно, чтобы $H(f)$ удовлетворяла условию (10). Согласованная фильтрация на приеме должна при этом осуществляться фильтром, частотная характеристика которого является комплексно-сопряженной ЧХ формирующего фильтра на передаче, т. е. $H_R(f) = H_T^*(f)$, тогда из $|H_T(f)|^2 = H(f)$ получим:

$$H_T(f) = H_R(f) = \sqrt{H(f)}. \quad (18)$$

Таким образом, если ЧХ формирующего фильтра будет представлять собой *корень из приподнятого косинуса*, то каскад из формирующего и согласованного фильтра будет давать как раз фильтр Найквиста, который позволит устранить МСИ при демодуляции. ИХ фильтра типа «корень из приподнятого косинуса» определяется выражением [1]:

$$h_T(t) = h_R(t) = \frac{1}{\pi t} \frac{1}{1 - (4\beta t/T)^2} \sin\left(\frac{2\pi(1-\beta)}{T}\right) + \frac{1}{\pi} \frac{4\beta/T}{1 - (4\beta t/T)^2} \cos\left(\frac{2\pi(1+\beta)}{T}\right) \quad (19)$$

Рис. 8 и скрипт 3 иллюстрируют ИХ (19) и полученные через преобразование Фурье ЧХ фильтра типа «корень из приподнятого косинуса» для трех значений коэффициента сглаживания β с коэффициентом передискретизации 8: из графиков следует, что с увеличением β уровень внеполосных излучений в частотном домене увеличивается в области $|f| > 0,5/T$; вместе с этим, уровень боковых лепестков ИХ в области $|t| > T$ уменьшается. Таким образом, выбор коэффициента сглаживания β является компромиссом. При построении приемопередающего тракта следует учитывать, что ИХ формирующего и согласованного фильтров $h_T(t) = h_R(t)$ по отдельности не удовлетворяет условию отсутствия МСИ, однако если поставить их последовательно в тракте передачи и приема, то МСИ устранится.

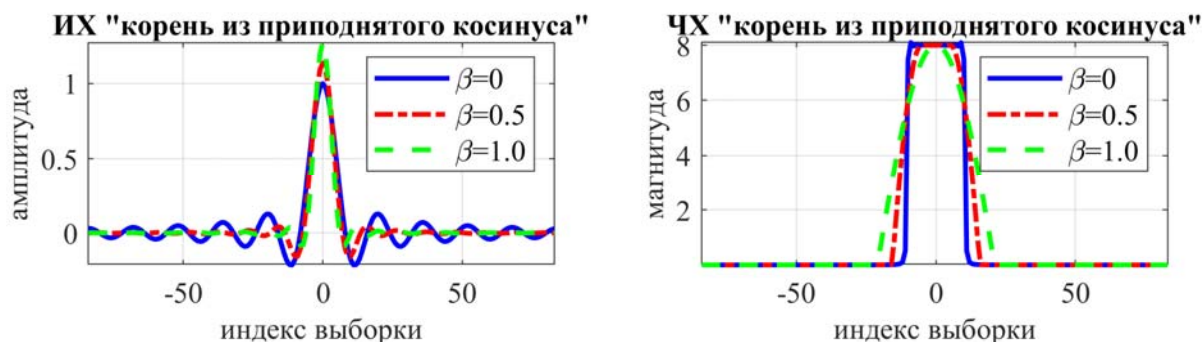


Рис. 8. ИХ и ЧХ фильтра «корень из приподнятого косинуса»

Скрипт 3. Функция ИХ фильтра «корень из приподнятого косинуса»

```

% визуализация ИХ и ЧХ формирующего фильтра
irfn=21; % порядок фильтра
ipoint=8; % коэффициент передискретизации (число выборок на символ)
sr=256000.0; % символьная скорость, симв/с
xx=[0:1:irfn*ipoint-1]-irfn*ipoint/2; % масштаб по выборкам
beta1=0; xh1=hcoef(irfn,ipoint,sr,beta1,1); xf1=abs(fftshift(fft(xh1)));
beta2=0.5; xh2=hcoef(irfn,ipoint,sr,beta2,1); xf2=abs(fftshift(fft(xh2)));
beta3=1; xh3=hcoef(irfn,ipoint,sr,beta3,1); xf3=abs(fftshift(fft(xh3)));
subplot(1,2,1); plot(xx,xh1,'b-', 'linewidth',2); grid on; hold on;
plot(xx,xh2,'r-', 'linewidth',2); plot(xx,xh3,'g-', 'linewidth',2);
xlabel('индекс выборки'); ylabel('амплитуда');
legend('\beta=0', '\beta=0.5', '\beta=1.0'); axis('tight');
title('ИХ "корень из приподнятого косинуса"');
subplot(1,2,2); plot(xx,xf1,'b-', 'linewidth',2); grid on; hold on;
plot(xx,xf2,'r-', 'linewidth',2); plot(xx,xf3,'g-', 'linewidth',2);
legend('\beta=0', '\beta=0.5', '\beta=1.0'); axis('tight');
xlabel('индекс выборки'); ylabel('магнитуа');
title('ЧХ "корень из приподнятого косинуса"');
% формирование коэффициентов фильтра корень из приподнятого косинуса
function [xh] = hcoef(irfn,ipoint,sr,beta,ncc)
% Выходные данные:
% xh - коэффициенты формирующего (прд) или сглаживающего (прм) фильтра
% Входные параметры:
% irfn : число символов для фильтрации (порядок фильтра)
% ipoint : число выборок на символ
% sr : символьная скорость
% beta : коэффициент сглаживания
% ncc : 1 - формирующий (прд) фильтр; 0 - сглаживающий (прм) фильтр
% point = ipoint; % инициализация point числом выборок на символ
tr = sr; % инициализация tr символьной скоростью
tstp = 1/tr/ipoint; % период дискретизации
n = ipoint*irfn; % число коэффициентов фильтра
mid = n/2 + 1; % индекс центрального коэффициента фильтра
for i = 1 : n % цикл по коэффициентам фильтра
j = i - mid; % индекс коэффициента относительно центрального
if j == 0.0
xt = (1-beta+4*beta/pi)* tr; % центральный коэффициент h(0)
else
sub2 =(4*beta*j/ipoint)^2;
if sub2 ~= 1.0

```



```

x1=sin(pi*(1-beta)/ipoint*j)/pi/(1-sub2)/j/tstp;
x2=cos(pi*(1+beta)/ipoint*j)/pi*(4*beta*tr)/(1-sub2);
xt = x1 + x2;
else
    xt = beta*tr*((1-2/pi)*cos(pi/4/beta)+...
        (1+2/pi)*sin(pi/4/beta))/sqrt(2);
end % if sub2 ~ = 1.0
end % if j == 0.0
if ncc == 0 % сглаживающий (прм) фильтр
    xh(i) = xt/ipoint/tr; % нормировочный коэффициент
elseif ncc == 1 % формирующий (прд) фильтр
    xh(i) = xt/tr; % нормировочный коэффициент
else
    error('ncc error');
end % if ncc == 0
end % for i = 1 : n

```

5 Использование фильтра «приподнятого косинуса»

Рис. 9 а, б и скрипт 4 иллюстрируют пример работы фильтра с ИХ длиной 40 символов при передаче 50 символов с передискретизацией в 8 раз и скоростью $R = 1$ Мсимв/с для двух параметров коэффициента сглаживания $\beta = 0,1$ (рис. 9, а) и $\beta = 0,9$ (рис. 9, б).

Скрипт 4. Пример работы фильтра типа «приподнятого косинуса»

```

L=40; % длина фильтра
R=1e6; % символьная скорость 1 Мсим/с
sps=8; % число выборок на символ
Fs=sps*R; % частота дискретизации (передискретизация в 8 раз)
T=1/R; % длительность символа
Ts=1/Fs; % период дискретизации
beta =0.9; % коэффициент сглаживания
nsym=50; % число символов
% Синтез фильтра типа "приподнятого косинуса"
if mod(L,2)==0
    M=L/2; % для четных L
else
    M=(L-1)/2; % для нечетных L
end
h=zeros(1,L);
for n=-M:M
    num=sin(pi*n*Ts/T)*cos(beta*pi*n*Ts/T);
    den=(pi*n*Ts/T)*(1-(2*beta*n*Ts/T)^2);
    h(n+M+1)=num/den;
    if (1-(2*beta*n*Ts/T)^2)==0
        h(n+M+1)=pi/4*sin(pi*n*Ts/T)/(pi*n*Ts/T);
    end
    if n==0
        h(n+M+1)=cos(beta*pi*n*Ts/T)/(1-(2*beta*n*Ts/T)^2);
    end
end
end

```



```

figure(1); subplot(3,2,1); % impz(h,1); % отображение ИХ цифрового фильтра
stem(h); grid on; axis('tight'); title('ИХ фильтра');
% пример фильтрации символов
data=2*(rand(1,nsym)>=0.5)-1; % формирование биполярных символов
output=upsample(data,Fs/R); % передискретизация символов
y=conv(h,output); % свертка символов с ИХ фильтра
% y=filter(g,1,output); % фильтрация символов с ИХ фильтра
subplot(3,2,[3 4]); stem(data); grid on; axis('tight');
title('Символы на входе фильтра'); ylabel('амплитуда'); %xlabel('символы');
subplot(3,2,[5 6]); plot(y); grid on; axis('tight');
title('Символы на выходе фильтра'); ylabel('амплитуда'); xlabel('выборки');
% Оценка спектра сигнала
L=length(y); NFFT=2^nextpow2(L);
FFTY=fft(y,NFFT); FFTY=fftshift(FFTY)/L; f1=(-NFFT/2:NFFT/2-1)*Fs/NFFT;
subplot(3,2,2); plot(f1,20*log10(abs(FFTY))); grid on;
xlabel('частота, Гц'); ylabel('магнитуда, дБ'); title('Спектр сигнала');
eyediagram(y,2*sps); % глазковая диаграмма

```

Из графиков символов на выходе фильтра следует, что при $\beta = 0,9$ амплитуда сигнала меняется в меньших пределах, чем при $\beta = 0,1$. Из спектров сигналов на выходе фильтра следует, что при ограничении полосы с помощью фильтра Найквиста при $\beta = 0,1$ ширина спектра меньше, чем при $\beta = 0,9$: при $\beta = 0,1$ получаем примерно 1 МГц, т. е. почти теоретический предел спектральной эффективности 1 бит/с/Гц (для ФМ-2); при $\beta = 0,9$ ширина спектра примерно равна ширине главного лепестка спектра без фильтра Найквиста (см. рис. 1, б), т. е. 2 МГц со спектральной эффективностью 0,5 бит/с/Гц; при $\beta = 0,5$ получаем промежуточное значение ширины полосы сигнала.

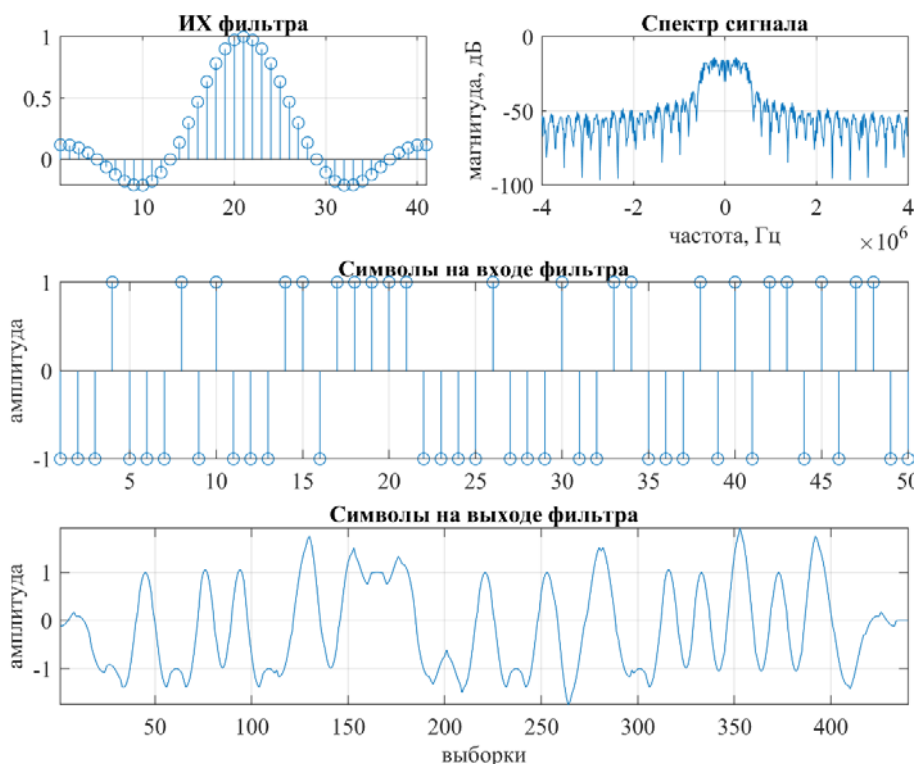
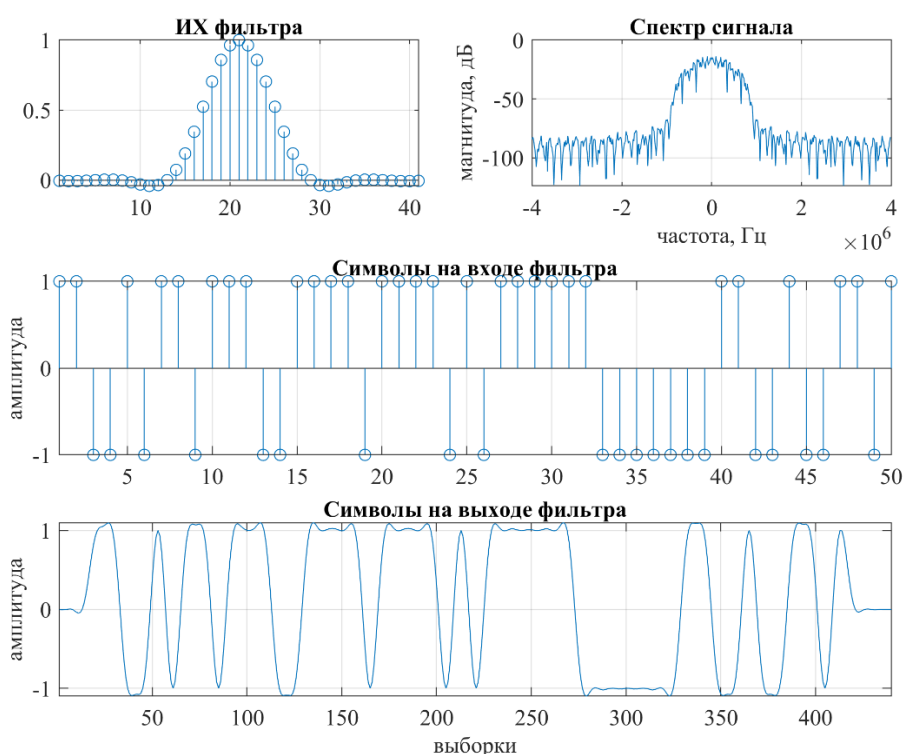
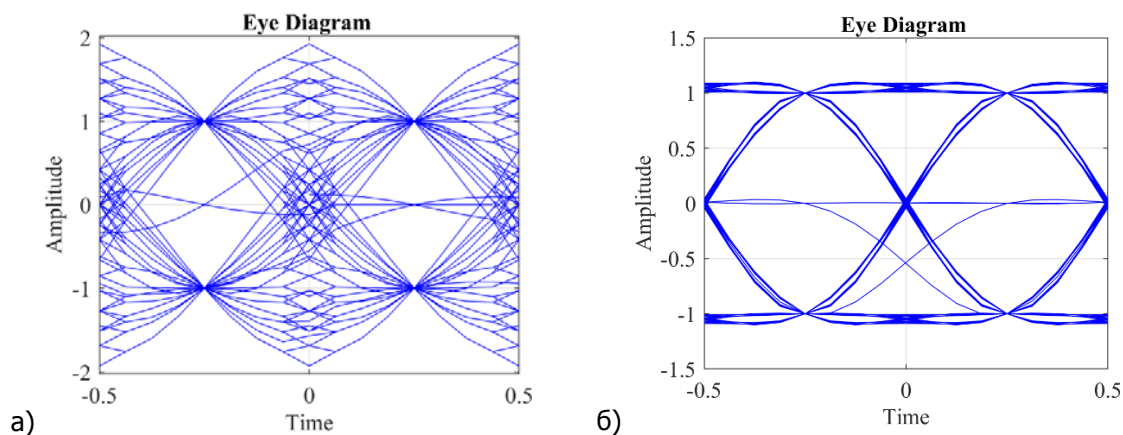


Рис. 9. Функционирование фильтра при: а) $\beta = 0,1$

Рис. 9. Функционирование фильтра при: б) $\beta = 0,9$

6 Использование глазковых диаграмм

Снижение помехоустойчивости (п/у) можно проиллюстрировать также глазковыми диаграммами. Рис. 10 иллюстрирует пример глазковой диаграммы для 500 символов на интервале передачи двух символов с использованием команды `eyediagram(y,2*sps)`⁶. На сгенерированных диаграммах из сравнения следует, что при $\beta = 0,1$ амплитуда сигнала меняется в больших пределах, чем при $\beta = 0,9$, а глаз выглядит ограниченным (рис. 10, а), а при $\beta = 0,9$ глаз становится более открытым (рис. 10, б). С точки зрения п/у ограничение β приводит к росту ошибок синхронизации.

Рис. 10. Глазковая диаграмма сигналов: а) $\beta = 0,1$; б) $\beta = 0,9$

⁶ Eye Diagram Analysis. URL: <https://www.mathworks.com/help/comm/ug/eye-diagram-analysis.html>.



С точки зрения синхронизации приема глазковая диаграмма получается при наложении импульсных сигналов друг на друга. Наложение множества символов дает глазковую диаграмму, называемую так, потому что получающееся изображение выглядит как открывание глаза⁷. Получение глазковой диаграммы можно проиллюстрировать на примере наложения комбинаций трех бит⁸ (рис. 11).

Для минимизации ошибок синхронизации на приеме значение принятого сигнала анализируется в середине глазка, где вероятность возникновения ошибки минимальна.

Теоретически глазковые диаграммы для нефильтрованных сигналов должны выглядеть как прямоугольники, однако конечное время фронта и спада приводит к тому, что диаграммы больше похожи на глазок. Рис. 12 иллюстрирует параметры, которые можно извлечь из визуального анализа глазковой диаграммы. В частности, глазковая диаграмма может указывать лучшую точку для выборки, показывать ОСШ (отношение сигнал/шум) в точке выборки и указывать величину джиттера (фазового дрожания при пересечении нуля)⁹.

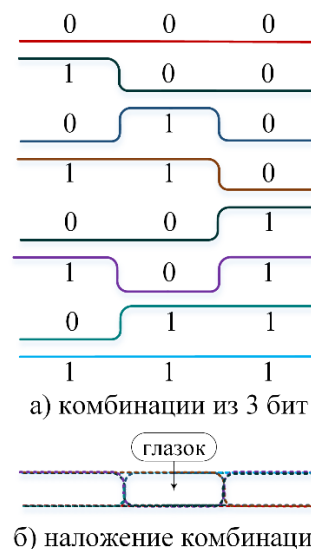


Рис. 11. Принцип построения глазковой диаграммы

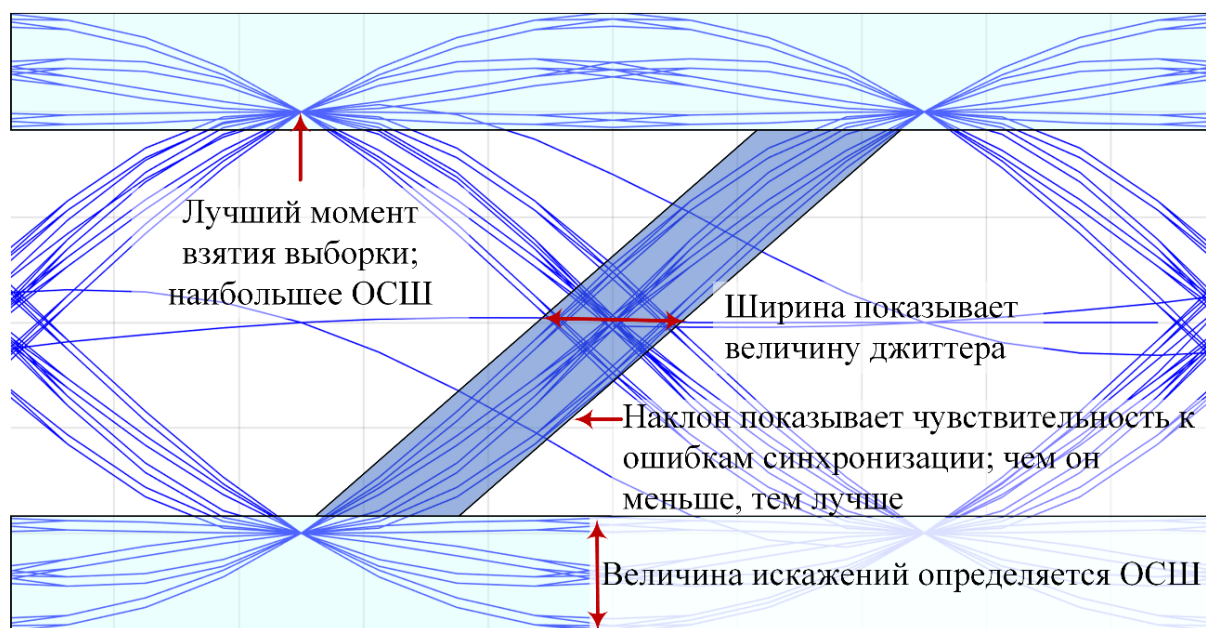


Рис. 12. Анализ глазковой диаграммы

⁷ Основы глазковой диаграммы: чтение и применение глазковых диаграмм. URL: <https://radioprogram.ru/post/681>

⁸ Методы измерения шума в цифровых схемах. URL: <https://russianelectronics.ru/metody-izmereniya-shuma-v-cifrovyyh-shemah/>

⁹ Методы измерения шума в цифровых схемах. URL: <https://russianelectronics.ru/metody-izmereniya-shuma-v-cifrovyyh-shemah/>



Заключение

Разработанный набор скриптов Matlab для синтеза импульсных и частотных характеристик формирующих и согласованных фильтров с заданными параметрами коэффициента сглаживания и ограничения длины позволяет исследовать их частотно-временные характеристики, а также проводить оценку их применимости по глазковой диаграмме. Предложенный подход с реализацией функций фильтрации в среде Matlab иллюстрирует развитие перспективной тенденции передачи, приема и обработки сигналов средствами модельно-ориентированного проектирования и программно-конфигурируемого радио.

Литература

1. Harada, H.; Prasad, R. Simulation and software radio for mobile communications. Artech House, 2002. 448 p.
2. Прокис, Дж. Цифровая связь. Москва: Радио и связь, 2000. 800 с.
3. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Вильямс, 2016. 1104 с.
4. Фокин Г. А. Технологии программно-конфигурируемого радио: учебное пособие для вузов. Москва: Горячая линия-Телеком, 2019. 315 с.

References

1. Harada H., Prasad R. Simulation and software radio for mobile communications. Artech House. 2002. 448 p.
2. Prokis, J. Digital communication. Moscow: Radio and communication, 2000. 800 p.
3. Sklyar, B. Digital communication. Theoretical foundations and practical application. M.: Williams, 2016. 1104 P.
4. Fokin, G. A. Software-configurable radio technologies: textbook for universities. Moscow: Goryachaya liniya-Telekom, 2019. 315 p. (in Russian).

Фокин Григорий Алексеевич

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, grihafokin@gmail.com

Fokin Grigoriy A.

Candidate of engineering sciences, docent, associate professor, The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications, grihafokin@gmail.com