

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

На правах рукописи

Гончарова Виктория Игоревна

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Специальность 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор В.Ф. Шишлаков

Санкт-Петербург – 2024

Содержание

Введение.....	4
1 ОБЗОР МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ.....	10
1.1 Обзор методов исследования систем автоматического управления с распределенными параметрами.....	10
1.2 Обзор методов построения и исследования моделей систем с распределёнными параметрами.....	21
1.3 Постановка задач диссертации	27
1.4 Выводы.....	28
2 СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА.....	29
2.1 Математические модели линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами.....	30
2.2 Общая схема решения задачи синтеза линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами	32
2.3 Пример решения параметрического синтеза линейных САУ с распределенными параметрами.....	41
2.4 Математические модели нелинейных САУ с распределенными параметрами.....	53
2.5 Общая схема решения задачи синтеза нелинейных систем автоматического управления с распределенными параметрами	54
2.6 Пример решения задачи параметрического синтеза нелинейных непрерывных САУ с распределенными параметрами	62
2.7 Выводы.....	81
3 СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА.....	82

3.1 Математическая модель импульсных линейных систем с распределенными параметрами в частных производных.....	82
3.2 Формирование целевой функции для нелинейных импульсных САУ с распределенными параметрами.....	88
3.3 Пример решения задачи синтеза параметров линейных импульсных систем с распределенными параметрами.....	91
3.4 Пример решения задачи синтеза параметров нелинейных импульсных систем с распределенными параметрами.....	103
3.5 Выводы.....	123
4 ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	125
4.1 Моделирование трубопровода для термической жидкости.....	125
4.2 Исследование модели длинной линии электропередач.....	143
4.3 Решение прикладной задачи. Параметрический синтез системы.....	166
управления давлением в тормозной системе.....	166
4.4 Выводы.....	186
Заключение.....	188
Список использованных источников.....	190
Приложение А.....	205
Блок-схемы.....	205
Приложение Б.....	207
Акты о внедрении результатов диссертационной работы.....	207

Введение

Актуальность темы. В современном мире системы автоматического управления (САУ) требуют более сложных алгоритмов, учета большего количества параметров, а значит становятся все более сложными в реализации. Задача реализации систем с распределёнными параметрами (РП) по сравнению с системами с сосредоточенными параметрами имеет ряд особенностей, связанных с построением математической модели. Главной особенностью систем автоматического управления с распределёнными параметрами является учёт пространственной протяженности управляемого объекта, что влечёт за собой описание не только во времени, но и в пространстве.

Следствием особенности описания объекта можно считать тот факт, что САУ с распределёнными параметрами описывают дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, а также интегро-дифференциальными уравнениями, что влечёт за собой трудности в расчётах и построении математической модели объекта.

Степень разработанности темы. Основоположниками теории автоматического управления систем с распределёнными параметрами по праву можно считать А.Г. Бутковского, Т.К. Сиразетдинова, Л.М. Пустыльниковца, И. Бегимова, В.Л. Рожанского, А.И. Егорова, Г.Л. Дегтярёва, Э.Я. Рапопорта, Ж.-Л. Лионса, И.М. Першина и других. Подавляющее количество результатов, полученных учёными в области САУ с распределёнными параметрами, можно отнести к линейным системам. На практике такое возможно, если САУ работает в режиме малых отклонений. В большинстве практических задач системы и устройства систем проявляют свои нелинейные свойства. В ряде случаев такие системы могут быть описаны приближено к линейным, что не всегда даёт необходимый результат в управлении. Исследование и описание нелинейных объектов, в свою очередь, всегда сопровождается преодолением значительных трудностей, связанных с математическим расчётом, и обобщений, а также

проведения более детального анализа системы автоматического управления и определения особых частных случаев.

Объектом исследования являются системы автоматического управления.

Предметом исследования является параметрический синтез операторов управления нелинейных непрерывных и нелинейных импульсных САУ.

Цель работы заключается в повышении точности построения математических моделей систем автоматического управления с распределенными параметрами за счет реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, путем распространения известного метода параметрического синтеза – обобщенного метода Галеркина (метода ортогональных проекций).

Для достижения поставленной цели в работе были решены следующие основные задачи:

— реализация перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям;

— распространение метода параметрического синтеза линейных и нелинейных непрерывных систем с распределенными параметрами высокого порядка, приближенно обеспечивающего показатели качества регулирования САУ;

— распространение метода параметрического синтеза линейных и нелинейных импульсных систем с распределенными параметрами высокого порядка, приближенно обеспечивающего показатели качества регулирования САУ.

Научная новизна. В диссертационной работе новизна заключается в следующем:

— впервые предложен метод перехода в САУ с учетом специфики распределенных параметров от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям;

— предложен модифицированный метод параметрического синтеза линейных и нелинейных непрерывных САУ с учетом специфики распределенных параметров по заданным показателям качества их работы в переходном режиме;

— предложен модифицированный метод параметрического синтеза линейных и нелинейных импульсных САУ с учетом специфики распределенных параметров, содержащих амплитудно-импульсные модуляторы, по заданным показателям качества их работы в переходном режиме;

— на основе предложенных методов разработаны унифицированные алгоритмы синтеза линейных и нелинейных САУ с РП, как непрерывных, так и импульсных, различной степени сложности, порядка и структуры, отличающихся новой интерпретацией известного метода параметрического синтеза Галеркина.

Общую математическую основу для предложенных методов составляет обращение одного из методов математической физики, обобщенного метода Галеркина, на решение поставленной задачи. Достоинство предлагаемых методов заключается в алгебраизации решения задачи синтеза и возможности с единых математических, алгоритмических и методологических позиций решать поставленную задачу для большого класса систем управления.

Кроме того, разработанные методы синтеза дают возможность существенно сократить объем вычислений по сравнению с подходами, опирающимися на прямое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных.

Теоретическая значимость работы заключается в дополнении ранее известного метода параметрического синтеза путем алгебраизации решения задачи синтеза систем с распределенными параметрами. Это позволяет увеличить точность построения математической модели исследуемой системы управления.

Практическая ценность и реализация в промышленности. Предложенные в работе модифицированные методы синтеза линейных и нелинейных САУ с РП, являются теоретической основой разработанных алгоритмов и программ синтеза систем управления с распределенными параметрами. Они могут быть использованы в качестве прикладного программного обеспечения при создании систем автоматизированного проектирования линейных и нелинейных, непрерывных и импульсных САУ с РП.

Внедрение результатов диссертационной работы. Полученные результаты использованы в учебном процессе на кафедре «Управление в технических системах» Санкт-Петербургского Государственного университета аэрокосмического приборостроения (ГУАП), а также в научной деятельности федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем машиноведения Российской академии наук».

Методы исследования. Для решения поставленных задач в работе были использованы фундаментальные положения теории автоматического управления, математическое обеспечение, реализующее переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, ряды Фурье. Поскольку модифицируемый в диссертационной работе метод синтеза параметров САУ с РП обеспечивает приближенное воспроизведение их динамических характеристик, то теоретические результаты, полученные в работе, подтверждаются иллюстрируемыми примерами и решением технических задач.

Положения диссертации, выносимые на защиту:

— разработка специального алгоритмического обеспечения систем управления с распределенными параметрами для реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям;

— применение метода параметрического синтеза линейных и нелинейных непрерывных систем автоматического управления, обобщенного метода Галеркина, к САУ с распределенными параметрами по заданным показателям качества работы в переходном режиме с целью улучшения их технических характеристик;

— применение метода параметрического синтеза линейных и нелинейных импульсных систем автоматического управления, обобщенного метода Галеркина, к САУ с распределенными параметрами по заданным показателям качества работы в переходном режиме с целью улучшения их технических характеристик;

— алгоритмы, реализующие метод параметрического синтеза непрерывных систем автоматического управления с распределенными параметрами, с целью улучшения их технических характеристик.

Достоверность полученных результатов подтверждена результатами моделирования и аналитических расчётов. Результаты, полученные в ходе выполнения исследования, не противоречат ранее полученным данным, опубликованным в открытых источниках.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на: XXIII международной научной конференции «Волновая электроника и инфокоммуникационные системы», 2020 г; IV, V, VI международных форумах «Метрологическое обеспечение инновационных технологий» 2022 – 2024 г.г.; I, II Международных форумах Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве 2021 – 2022 г.г.; XIV, XVII Международных конференциях по электромеханике и робототехнике «Завалишинские чтения» 2020, 2022 г.г; VI Международной молодежной научно-практической конференции «Энергостарт» г. Кемерово, 2023 г.; XV Всероссийском межотраслевом молодежном конкурсе научно-технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» МАИ, г. Москва, 2023 г.; опубликованы в сборнике статей “Bulletin of the UNESCO department “Distance education in engineering of the SUAI” 2019 - 2024 г.г. Также материалы диссертации частично использованы в государственном задании «Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 4-х статьях в журналах из перечня ВАК РФ: «Датчики и системы», «Известия высших учебных заведений. Приборостроение», «Труды МАИ». Получены 7 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ, 1 отчет о НИР, 1 публикация в журнале, рецензируемом Scopus и 15 работ в других изданиях и материалах конференций.

Личный вклад автора. В работе предлагается использовать модифицированный обобщенный метод Галеркина для решения задачи синтеза параметров оператора управления нелинейных непрерывных и нелинейных импульсных САУ с распределенными параметрами, реализован переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа соответствует пунктам 5, 7 и 14 паспорта научной специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика. Проведенные исследования соответствуют формуле специальности.

1 ОБЗОР МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

В настоящем разделе приводится обзор методов синтеза и анализа систем автоматического управления с распределенными параметрами, анализируются их достоинства и недостатки. Рассматриваются подходы к построению математических моделей распределенных систем. На основе проведенного обзора формулируются цели и задачи диссертационной работы.

1.1 Обзор методов исследования систем автоматического управления с распределенными параметрами

В технических системах достаточно часто встречаются объекты, характеризующиеся пространственной протяжённостью. При рассмотрении таких САУ нельзя принимать во внимание только изменение координат во времени.

В этом случае состояние объектов управления должно быть описано как в каждый момент времени, так и в каждой точке геометрического пространства, в которой располагается описываемый элемент. Поэтому предпринимаются попытки разработки методов исследования систем с распределенными параметрами. Системы автоматического управления с распределёнными параметрами в простейшем случае описываются функцией с двумя переменными: временной и пространственной составляющими.

Развитие САУ с распределёнными параметрами имеет ряд сложностей:

1. Состояние объекта управления можно описать функцией с несколькими переменными.

2. Динамику таких систем можно описать дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений в частных производных, интегральными уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями и более сложными математическими аппаратами.

3. Различный характер управляющих воздействий на объект. Они могут описываться как функцией с одной переменной (т.е. быть сосредоточенными), так и функцией с двумя и более переменными (т.е. быть распределёнными).

4. Наложение ряда ограничений на управляющие воздействия и функции.

5. Сложность построения регулятора (оператора управления), обеспечивающая заданные динамические характеристики объекта управления.

С помощью САУ с распределёнными параметрами решается ряд технических задач, которые можно разделить на области применения:

— в отраслях промышленности (металлургической, химической, машиностроительной), где математический аппарат описан уравнениями параболического типа (в частности уравнение теплопроводности);

— в процессах, связанных с распределением температуры нагрева металла и равномерным распределением температуры по поверхности объекта;

— в авиационной технике, в частности в системах торможения колес тяжелых самолетов, с протяженностью трубопровода более 10 м.

В [1] рассмотрены вопросы, связанные со сложностью систем с распределёнными параметрами, которая связана с задачами наблюдаемости и управляемости.

В качестве САУ с распределёнными параметрами в [1-3] рассмотрено «применение распределенных параметров в математической модели атомного реактора, в котором происходит распределение температуры в технологических каналах, распределение расходов теплоносителя, распределение нейтронного потока, а также, распределение энерговыделения по активной зоне».

В работах [4-6] рассмотрено «применение систем с распределёнными параметрами для добычи и транспортировки минеральной воды, а также контроля состояния важных параметров гидролитосферы».

В [7] рассматривается САУ с распределёнными параметрами в производстве многожильных жестких световодов, а именно контроль за распределением температуры в камере нагрева при производстве.

В [8] рассмотрен пример «распределения параметров вдоль линии электропередач (ЛЭП). Поскольку ЛЭП — это протяженные проводники, подвешенные на безопасном расстоянии от земли – воздушные линии (ВЛ) или кабельные линии (КЛ), в которых проводящие жилы изолированы друг от друга и от внешней среды и защищены изоляцией и броней, по которым передается электрическая энергия. ЛЭП являются наиболее массовыми элементами системы электроснабжения, они связывают между собой отдельные узловые точки ее схемы.

Поскольку ЛЭП характерно равномерное распределение параметров по всей длине, моделирование и точный расчет схем, содержащих такие элементы, приводит к сложным вычислениям и усложнению работы системы, поэтому чаще всего ЛЭП представляют, как модель системы с сосредоточенными параметрами».

В [9-10] введено допущение, при котором ЛЭП рассматриваются не как элементы САУ с РП, а как элементы САУ с сосредоточенными параметрами (СП). Как отмечается в указанных работах данное допущение справедливо при протяженности ВЛ до 300 – 350 км, а для КЛ до 50 – 70 км.

На практике протяженность сельских электрических сетей значительно меньше, поэтому зачастую в литературных источниках они классифицируются как местные электрические сети небольшой протяженности, поэтому сельские электрические сети во всех случаях можно рассматривать как объекты с сосредоточенными параметрами [11-13].

Одним из примеров, где систему с распределенными параметрами, можно рассматривать как систему с запаздыванием можно принять трубопровод с жидкостью, газом, системы с длинными гидро- и пневмопроводами; системы, в

которых управляемая величина является характеристикой пространственного поля (тепловые поля, электромагнитные поля) и др. Как показано в [14-15] полученное в ходе решения уравнение содержит запаздывающий аргумент для функций, и по своей структуре аналогично описанию системы с запаздыванием. Таким образом, свойства системы с распределенными параметрами подобны свойствам систем с запаздыванием и оба типа систем имеют одинаковый вид описания. Величина запаздывания определяется свойствами системы. Для исследования систем с распределенными параметрами применяются те же методы, что и для систем с запаздыванием.

В [16-17] на основании результатов моделирования в гидроприводах, «характеризующихся сравнительно малой длиной, простых участков трубопроводов, которая редко достигает 5 м, и имеет относительно невысокое быстродействие направляющей гидроаппаратуры. Рабочее давление достигает 20 МПа, а в отдельных случаях 30 МПа. В этих условиях, как показывают специальные исследования, для описания динамических процессов в трубопроводах с жидкостью допустима математическая модель с сосредоточенными параметрами на входе и выходе».

Также в [16] сделан вывод о том, что «в результате моделирования, рассматриваемые уравнения для систем с сосредоточенными параметрами справедливы при условии, что волновые процессы в трубопроводах не рассматриваются; потери давления по длине трубопровода зависят от среднего значения расходов на входе и выходе; инерционная составляющая сил рабочей жидкости в трубопроводах не учитывается».

САУ с распределенными параметрами, как и любые другие системы, помимо всего прочего, имеют разделения на классы проблем исследования. В источниках [17-32] рассмотрена широкая классификация САУ с РП и применение их в промышленности. Подобная неоднозначность накладывает на САУ с распределенными параметрами возможность использовать различные математические аппараты для исследования систем. Однако не всегда математические методы исследования, которые подходят к одной задаче, могут

быть с точностью применены к другой, на первый взгляд схожей задаче. Для каждого примера необходимо иметь ограничения, учитывая которые, можно принять решение о возможности применения того или иного метода.

Так, например, «решение задач оптимального управления после использования вариационных условий (принцип максимума Л.С. Понтрягина) приводит к решению соответствующей краевой или граничной задачи. Даже для линейных САУ с сосредоточенными параметрами соответствующие краевые задачи не имели однозначного способа решения, пока Н.Н. Красовский в своих трудах не доказал, что проблему оптимального управления в линейных системах зачастую можно свести к решению проблемы моментов, разработанной в работе М.Г. Крейна»[33]. Красовский Н.Н. в свою очередь показал «приближенные методы вычисления оптимальных управляющих воздействий, где также дано решение краевых задач» [34-39].

Таким образом, для грамотного поиска и определения задачи, и пути решения, очень важное значение имеет правильная её постановка.

В современном мире для исследования систем в литературе известны методы синтеза регуляторов, которые можно разделить на следующие классы [40]:

- 1) аналитическое конструирование оптимальных регуляторов;
- 2) параметрический синтез регуляторов;
- 3) частотный метод синтеза.

«Исследование методов решения задач синтеза САУ с распределенными параметрами значительно усложняется по сравнению с САУ с сосредоточенными параметрами, где можно применять в значительной степени классические методы синтеза. В наиболее общем виде задачу синтеза оптимального управления замкнутой системы с распределёнными параметрами можно сформулировать следующим образом: при заданной функции состояния, определённой в замкнутой области изменения пространственной переменной с учётом допущений начальных и граничных условий, требуется найти управляющее воздействие как функцию управляемой величины, которая будет обеспечивать перевод объекта с распределёнными параметрами из заданного начального состояния в требуемое

конечное, при котором будет достигнуто экстремальное значение критерия оптимальности» [41].

В [42] представлен пример реализации синтеза адаптивного оптимального управления в линейных распределенных системах. Процесс в данном примере описан линейными векторными дифференциальными уравнениями, с начальными и граничными условиями. Важно отметить, что в случае, если замкнуть объект и модель регулятором, имеющим одинаковую структуру и свойства, то движения объекта и модели не совпадут. Такое поведение обусловлено разными параметрами объекта и модели. Дана рекомендация о том, что в целях уменьшения объема вычислений можно оставить без изменения структуру и параметры регулятора, которые были найдены на первом шаге, решить задачу нахождения с заданной точностью, а после ввести корректировку в управление. Таким образом, предложенный алгоритм синтеза состоит из взаимосвязанных алгоритмов параметрической идентификации синтеза оптимального управления. Недостатками метода можно также считать применение метода синтеза только в случае линейных систем.

В [43] рассмотрен синтез оптимального управления при полном измерении состоянии объекта управления.

Процесс оптимального управления с помощью задачи условий находится в классе ограниченных кусочно-непрерывных функций со значениями открытой области. Для построения оптимального управления при полном измерении состоянии объекта управления используется метод динамического программирования, при использовании которого задача сводится к решению функционального уравнения [44], при конечном условии, относительно оптимального функционала, параметрически зависящего от времени и определенного на множестве вектор функций, удовлетворяющих системе с граничными и начальными условиями [44].

Полученные краевые задачи являются нелинейными, поэтому определение параметров оптимального регулятора связано с проблемами вычисления.

Выведенный в [41] критерий обобщенной работы сводит к решению линейной системы, что значительно упрощает задачу.

Говоря о применимости представленной задачи и идеи к САУ с распределёнными параметрами в [45-46], сказано об обязательном наличии дополнительного слагаемого в критерии устойчивости, который имеет физический смысл оценки работы сигналов управления в оптимальной системе.

В ходе решения, с учетом начальных и граничных условий было выявлено, что для формирования сигнала оптимального управления требуется полное измерение состояния процесса, то есть вектор-функции для всех точек и в каждый момент времени. Тогда как в реальной ситуации получить полную информацию о текущем состоянии распределённого процесса невозможно, поэтому оптимальное управление не реализуемо. В источниках [47-53] предложены пути решения имеющейся проблемы, из которых видно, что не все значения вектор-функции могут быть доступны измерению, а наблюдаемые переменные могут содержать помехи.

В [54] рассматривается пример синтеза регулятора, вырабатывающего оптимальный сигнал управления по наблюдаемости. Найден закон оптимального управления. Выведен оптимальный закон как для случая САУ с распределенными параметрами, так и для САУ с сосредоточенными параметрами.

Анализируя закон оптимального управления в случае систем с распределёнными параметрами, элементами матрицы являются функции класса ограниченных кусочно-непрерывных функций. Из закона оптимального управления следует, что управление будет оставаться ограниченным, кусочно-непрерывным, если только элементами матрицы измерения являются ограниченные кусочно-непрерывные функции, что накладывает некоторое условие на способ измерения. В частности, нельзя синтезировать распределённое оптимальное управление по результатам наблюдения, являющимся значениями состояния системы в фиксированных точках области, где протекает процесс, так как в таком случае обычно в элементы матрицы вводят обобщенные функции,

например, функцию Дирака, которая везде в области рассмотрения равна нулю, кроме точек измерения. В них она обращается в бесконечность.

Матричная функция характеризует пространственную базу приложения управляющих воздействий, а матрица измерений - пространственную базу измерительного устройства. Если пространственная база приложения управляющих воздействий и пространственная база измерительного устройства не пересекаются, то оптимальное управления тождественно равно нулю.

Обобщая закон оптимального управления в [54] выведена, «теорема о базах управления и измерения пространственно-распределенных систем и представлено её доказательство».

В [55-56] предложен алгоритм синтеза, где минимальные требования к системе: задание показателей, сводятся к устойчивости перерегулирования, устойчивости, робастности и быстродействию. Основываясь на этих требованиях, можно сформировать желаемую передаточную функцию САУ, после чего найти модель системы в разомкнутом состоянии. Математическое описание позволяет составить уравнение, в котором передаточная функция регулятора является неизвестной. К основным недостаткам метода следует отнести:

- число искомых коэффициентов должно быть больше числа узлов;
- определена верхняя граница размещения узлов;
- выбран закон распределения узлов (например, равномерное распределение).

Важно отметить, что из множества возможных решений необходимо выбрать наиболее подходящее, соответствующее показателям качества. Поэтому следует оговорить некоторые вопросы точности решения уравнения синтеза.

В случае синтеза оптимального управления при управляющей функции, зависящей только от времени, в [57] говорится о зависимости функции только от времени. Как и в предыдущем методе синтеза - метод Беллмана является эффективным средством оптимального управления. Хотя в данном методе результаты получаются более скромные в виду того, что не удастся найти точное

решение интегро-дифференциальной краевой задачи типа Риккати. Это влечёт за собой использование различных процедур построения приближенных решений. Используется аппроксимация исходной краевой задачи обыкновенными дифференциальными уравнениями с помощью метода прямых.

В [57] рассмотрен «метод синтеза динамического программирования для решения задач оптимального управления тепловых и диффузионных процессов, когда процесс описывается краевыми задачами для уравнения теплопроводности или общих параболических уравнений». «Использован принцип оптимальности Беллмана для решения задачи управления, в котором отмечено, что оптимальное поведение системы обладает тем свойством, что, каков бы ни был момент времени (в промежутке от нуля до фиксированного момента времени), оно остаётся оптимальным относительно состояния системы в этот момент времени на всем оставшемся отрезке времени независимо от того, в каком состоянии система была в начальный момент времени».

В [48] предложен метод синтеза сложными системами с распределёнными параметрами. Передаточная функция объекта с распределёнными параметрами описывается некоторой системой линейных уравнений в частных производных, сходящихся в бесконечный ряд.

Если найдено описание объекта при условии, что некоторое семейство ортогональных и ортонормированных с определённым весом на заданном отрезке функций, не обязательно совпадающих с собственными функциями объекта. В ходе решения понятно, что САУ объектами строится как совокупность независимых контуров управления элементарными звеньями с помощью автономных регуляторов.

В [58-62] представлен метод синтеза параметров оператора управления системами с распределёнными параметрами. Синтез параметров оператора управления осуществляется путем линеаризации квадратической оценки ошибки системы при ограничениях на другие показатели. Изложенный подход к решению задачи является развитием на САУ с распределёнными параметрами метода оптимального синтеза нелинейных систем.

В конечном счете проблема синтеза сводится к представлению передаточной функции объекта сложной структуры в «типовой» форме. В более сложных ситуациях с пространственно-многомерным выходом распределённого объекта рассмотренный в [62] метод синтеза может быть реализован «путём представления передаточных функций объекта с распределёнными параметрами и регулятора, функции состояния объекта с распределёнными параметрами и управляющего воздействия в форме кратных сумм».

В [40, 63-65] предложен «метод спектрального представления САУ с распределёнными параметрами, который даёт возможность перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом». «С помощью такого метода становится возможным применение аналитического конструирования оптимального регулятора в САУ для синтеза регуляторов САУ с распределёнными параметрами».

Вместе со структурным синтезом систем автоматического управления, идентификацией объектов управления, анализом качества и устойчивости системы, одним из основных направлений является параметрический синтез регуляторов. Сущностью данного направления является поиск параметров регулятора при заданной структуре САУ и математических моделях объекта управления. Зачастую при заданной структуре регулятора затруднительно подобрать параметры, которые смогут обеспечить предъявляемые требования, а возможно подобранные параметры будет невозможно физически реализовать.

В [65] Ковалем В.А. выведена «интерпретация критерия Попова для САУ с распределёнными параметрами, которая звучит следующим образом: для абсолютной устойчивости нелинейной распределённой системы, при условии, что нелинейная характеристика не зависит от пространственных координат, достаточно, чтобы модифицированный пространственный годограф разомкнутой системы лежал справа от плоскости, проходящей через линию под углом к плоскости».

Таким образом, «система с распределенными параметрами будет устойчива, если каждый из контуров системы будет устойчив. Хотя параметр, который характеризует угол абсолютной устойчивости, ограничивающий сектор нелинейной характеристики может зависеть от значения обобщенной координаты, поэтому вопрос о возможности интерпретации частотного критерия абсолютной устойчивости для нелинейных систем с распределенными параметрами при нелинейной характеристике, зависящей от пространственных координат объекта управления, требует дальнейших исследований».

В [40, 66-68] также рассмотрен «метод анализа устойчивости САУ по интегральным функциям отклика. Предложена математическая модель замкнутой системы, описанной дифференциальным уравнением, заданы постоянные коэффициенты и однородные граничные условия. В ходе решения получено дисперсионное уравнение с собственными значениями краевой задачи, которые формируются граничными условиями. Исходя из достаточного условия устойчивости, сделан вывод о том, что, если корни дисперсионного уравнения определяют временной характер процесса и имеют все отрицательные действительные части – процесс является устойчивым».

В ходе проведения обзора методов исследования систем автоматического управления с распределенными параметрами были рассмотрены методы анализа и синтеза, приведены общие и частные случаи. Так, например, сформулирован модифицированный критерий устойчивости Попова для систем с распределенными параметрами.

Проведенный обзор показывает важность грамотного поиска, определения задачи и пути решения. Даны рекомендации на случаи, когда системы с распределенными параметрами, с присущей им сложностью использования уравнений в частных производных, можно исследовать как системы с сосредоточенными параметрами или системы с запаздыванием.

Таким образом, проблема разработки метода синтеза, в том числе параметрического, линейных и нелинейных, непрерывных и импульсных систем управления, является актуальной задачей.

1.2 Обзор методов построения и исследования моделей систем с распределёнными параметрами

В данном подразделе диссертации приводится обзор подходов к построению моделей систем с распределенными параметрами. Поскольку САУ с распределенными параметрами представляют технически более сложные системы в математическом представлении, на практике существуют методы их упрощения, сведения их к более простым системам, таким как: САУ с сосредоточенными параметрами и САУ с запаздывающим аргументом. Данные преобразования возможно проводить лишь в конкретных случаях, для конкретных систем. С этой целью в представленном разделе будут приведены некоторые примеры моделей с распределенными параметрами, даны рекомендации по упрощению системы.

Основные результаты в развитие теории моделирования были внесены известными российскими и зарубежными учеными: М.В. Кирпичевым, В.А. Вениковым, А.Г. Бутковским и другие.

Принцип построения любой модели системы управления заключается в том, что уравнения динамики системы должны быть тождественны уравнениям реальных звеньев. Таким образом объекты модели могут не совпадать с объектами конструкции, но физика функционирования системы будет сохраняться. Такой подход называется физическим моделированием.

В [18] представлена классификация физического описания моделей систем управления с распределенными параметрами. Физическое описание САУ с РП разделяется на пять видов (рисунок 1.1): по размерности занимаемого пространства, по величине, по виду сплошной среды, по виду процесса, по виду поля.



Рисунок 1.1 – Физическое описание САУ с РП

«Особенно разнообразным является физическое описание САУ с распределенными параметрами по технологическому процессу. Так как к нему можно отнести многие процессы технологического производства: нагрев (пламенный, индукционный, резисторный, плазменный, аэродинамический, радиационный, конвекционный, смешанный, с внутренними источниками тепла, с перемешиванием и пересыпанием), сушка, увлажнение, возгонка, осаждение, выпаривание, конденсация, фильтрация, разгонка по фракциям, смешение, разделение, ректификация, растворение, газификация, абсорбция, ресорбция, плавление, затвердевание, кристаллизация, перекристаллизация, обжиг, спекание, отжиг, термическая обработка, ковка, штамповка, волочение, прокатка, ядерные и химические реакции с катализаторами и без катализатора, науглероживание, легирование, цементация, травление, процессы в кипящем слое, резание и шлифование» [18].

«В перечисленных технологических процессах важным является получить требуемое распределение параметров по всему (или заданному) объему пространства или поверхности» [18].

На схеме рисунка 1.1 показаны виды простых полей, на практике часто встречаются поля более сложных (смешанных) характеристик. К ним можно отнести электромагнитное поле, поле термонапряжений и термоперемещений.

Важным недостатком физического описания модели САУ с РП является невозможность построения модели системы для решения задачи параметрического синтеза обобщенным методом Галеркина.

Противоположным примером является математическое моделирование, которое имеет основное преимущество – возможность применения методов математической физики, операционное исчисление, системы дифференциальных уравнений. «Процессы в системах управления различной физической природы могут быть описаны с единых математических и методологических позиций, что позволяет обобщить решение задачи синтеза» [69].

В [70] отмечено, что «математическая модель не может быть тождественна реальной системе, а значит не отображает всех свойств САУ. Следовательно, те или иные разрабатываемые методы синтеза применимы при определенных ограничениях».

В [18] представлена «классификация математического описания моделей систем управления с распределенными параметрами» (рисунок 1.2).



Рисунок 1.2 – Математическое описание САУ с РП

«По функциям, которые описывают состояние управляемой или управляющей системы, подразделяются на: нуль-мерные (сосредоточенные системы, в которых функция состояния определена только в дискретных точках пространства, но этих точек может быть и неограниченное количество), одномерные (определены на линиях, в частности на прямой (бесконечной), на отрезке, на произвольной кривой), двумерные (определены на плоскости или части произвольной поверхности), трехмерные (определены в области произвольной формы), n -мерные. Важно отметить, что область, в которой определена функция состояния может быть односвязной, двухсвязной, а также многосвязной» [18].

«Указанные выше виды уравнений, описывающие динамику САУ с распределёнными параметрами, имеют собственную классификацию, рассмотренную в соответствующих книгах» [21-26]. Так, например, из линейных дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. уравнений математической физики, могут быть использованы уравнения, имеющие вид: эллиптического, гиперболического и параболического типов (поскольку перечисленные уравнения наиболее широко используются).

Рассмотренные управляемые системы имеют различные виды управляющих воздействий, имеет смысл классифицировать виды управляющих воздействий, которые встречаются в системах с распределёнными параметрами (Рисунок 1.3).

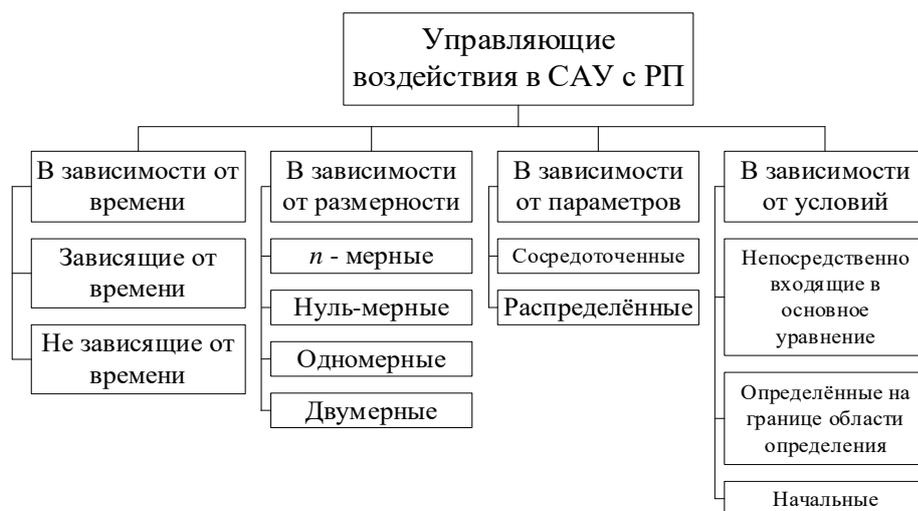


Рисунок 1.3 – Классификация управляющих воздействий САУ с РП

«Важно также учитывать дополнительные ограничивающие условия на функции состояния и управляющие воздействия, имеющие разнообразный характер. Обобщая описание дополнительных ограничений, независимо от основных уравнений системы, а также граничных и конечных условий задан некоторый оператор, который определён на функциях состояния и управляющих воздействиях и принимающих свои значения из некоторого множества определенной природы. В таком множестве значений оператора определяется подмножество, в котором только и разрешается принимать свои значения. Так как если не принимать во внимание разные ограничивающие условия, то поставленная задача управления становится весьма общей. Становится затруднительно развивать глубокую теорию и методы их решения. Исходя из этого, требуется детализация дополнительных ограничивающих условий. Каждое дополнительное ограничение, как правило, значительно усложняет задачу» [18].

Дополнительные ограничивающие условия в свою очередь так же разделяются на тип равенств и тип неравенств. Последние представляют большую трудность в решении, а также могут накладываться отдельно на управляющие воздействия и отдельно на функции состояния. Часто используемыми являются ограничивающие условия типа неравенств, наложенные на значение управляющих воздействий, менее используемыми являются ограничивающие условия типа неравенств, накладываемые на функционалы (интегралы различных видов) от управляющих воздействий.

Ограничивающие условия типа неравенств, накладываемые на значения функции состояния и управления, соответствуют тому, что область их допустимых значений становится замкнутым множеством, а не открытым. В силу того, что такое положение затрудняет применение методов классического вариационного исчисления для решения открытых областей допустимых значений варьируемых функций. Исходя из этого возникла необходимость в развитии и дальнейшем обобщении методов вариационного исчисления при наличии замкнутых областей допустимых значений варьируемых функций. Задачи, поставленные в [22-24] А.А. Фельдбаумом были решены в [27], в виде принципа максимума, изначально

развиваемого для САУ с сосредоточенными параметрами. Со временем принцип максимума в вариационном исчислении нашел развитие и обобщение на системы с распределёнными параметрами, в оригинальном методе решения с более сложными ограничениями, которые представлены в [28–32].

В [71] показан пример моделирования однофазной линии электропередач с сосредоточенными параметрами. Математическое описание блока представлено в [72]. Модель основана на методе волны перемещения Берджерона. Пренебрегая потерями (которые могут быть очень точно аппроксимированы другими способами), точное решение может быть получено с помощью метода характеристик. Этот метод в основном использовался в Европе, где он известен как метод Берджерона; и был впервые применен к гидравлическим задачам в 1928 году, а затем к электрическим задачам [73].

Системы с распределёнными параметрами близки по своим свойствам к системам с запаздыванием. Полученное в [74] уравнение содержит запаздывающий аргумент для функций, и по своей структуре аналогично описанию системы с запаздыванием. Величина запаздывания определяется свойствами САУ.

В ряде источников [17,75] в результате проведенных исследований было получено основное допущение и ограничение, при котором гидравлические САУ с распределёнными параметрами можно рассматривать и исследовать как системы с сосредоточенными параметрами, а именно при длине трубопровода (одного сегмента трубопровода) не более 5 м, поток жидкости принимается непрерывным по длине трубопровода, тогда ошибка моделирования входит в 5 % зону отклонения, что является оптимальным для систем автоматического управления.

В [76] рассмотрен метод статического моделирования САУ с РП. Суть метода заключается в многократном применении одного и того же, относительно простого, аналогового элемента или группы таких элементов [77]. При соединении с другими специальными устройствами (набор функциональных потенциометров, функциональные (нелинейные) преобразователи) появляется возможность построения аналоговых вычислительных машин. Недостатком метода является наличие большой ошибки, динамика системы в таком случае уже не будет

подчиняться законам управления, а лишь законам статистики, что приводит к завышенным требованиям устойчивости.

1.3 Постановка задач диссертации

В диссертации рассматриваются стационарные линейные и нелинейные, непрерывные и импульсные системы с распределенными параметрами.

Цель работы заключается в повышении точности построения математических моделей систем автоматического управления с распределенными параметрами за счет реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, путем распространения известного метода параметрического синтеза – обобщенного метода Галеркина (метода ортогональных проекций).

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

1. Реализация перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

2. Распространение метода параметрического синтеза линейных и нелинейных непрерывных систем с распределенными параметрами высокого порядка, приближенно обеспечивающего показатели качества регулирования САУ.

3. Распространение метода параметрического синтеза линейных и нелинейных импульсных систем с распределенными параметрами высокого порядка, приближенно обеспечивающего показатели качества регулирования САУ.

1.4 Выводы

По материалам раздела могут быть сделаны следующие выводы.

1. Представлен обзор литературы, отражающей текущее состояние исследований и построения математической модели систем автоматического управления с распределенными параметрами.

2. С учетом проведенного обзора методов анализа и синтеза САУ с РП сформулирована цель диссертационной работы, которая заключается в повышении точности построения математических моделей систем автоматического управления с распределенными параметрами за счет реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, путем распространения известного метода параметрического синтеза – обобщенного метода Галеркина (метода ортогональных проекций).

3. Поставлены задачи исследования, направленные на достижение цели диссертационной работы, которые состоят в распространении методов, имеющих общую математическую и методологическую основу, для решения задач параметрического синтеза непрерывных и импульсных, линейных и нелинейных систем автоматического управления с распределенными параметрами.

Основные результаты, полученные в данном разделе, опубликованы автором в работах [58-61].

2 СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

В представленном разделе обобщенный метод Галеркина распространяется на непрерывные линейные и нелинейные системы автоматического управления с распределенными параметрами.

«При решении многих технических задач, в отличие от задач синтеза управления объектами с сосредоточенными параметрами, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений» [66–68], эти задачи для объектов с распределенными параметрами исследованы существенно меньше. Это было связано, во-первых, со сложностью как исследования самих краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, так и численного их решения. Во-вторых, имелись сложности технического и технологического характера, связанные с оперативностью, точностью проводимых замеров и обработки их результатов, в-третьих, отсутствие достаточно эффективных математических методов и мощных вычислительных средств для своевременного принятия решения по определению текущих значений управляющих воздействий.

Системами автоматического управления с распределенными параметрами будем называть САУ, в которых имеется несколько регулируемых величин, связанных между собой дифференциальными уравнениями в частных производных.

Примерами САУ с РП могут служить «процессы управления нагревом стержня в печи, который регулируется в заданных точках контроля; системы автоматического управления гидроприводами, где требуется одновременная стабилизация скоростей вращения, параметров рабочего тела (температуры, давления и т. п.) на различных ступенях гидравлического тракта; системы автоматического управления полетом летательных аппаратов, электроприводами в

станах непрерывной прокатки холодного и горячего металла и многие другие. САУ технологическими процессами в химической, текстильной, угольной и других отраслях промышленности» [2 – 5, 46-49 – 25 и др.]

2.1 Математические модели линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами

Разработка системы автоматического управления любым достаточно сложным техническим объектом представляет собой длительный многоплановый процесс, одним из основных этапов является построение адекватной математической модели объекта управления. Выбор математической модели объекта так или иначе связан с идеализацией его математического описания, которая предполагает выведение главных закономерностей в поведении объекта и пренебрежение второстепенными связями и эффектами, с учетом ожидаемых условий его физики функционирования в реальной системе. Так, если в системе регулирования нагревом стержня в печи, реализовать переход от, присущим системам с распределенными параметрами, дифференциальных уравнений в частных производных, к обыкновенным дифференциальным уравнениям, то наиболее целесообразно рассматривать систему как линейную систему с запаздывающим аргументом.

Следует отметить, что такая процедура является весьма полезной, поскольку алгоритмы для эффективного решения обыкновенных дифференциальных уравнений разработаны значительно лучше, по сравнению с алгоритмами интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.

Дифференциальные уравнения в частных производных в общем смысле разделяют на несколько классов.

В таблице 2.1 [78-79] приведены типовые дифференциальные уравнения в частных производных, которые могут быть использованы в САУ с распределенными параметрами.

Таблица 2.1 – типовые линейные дифференциальные уравнения в частных производных

№ п/п	Название уравнения	Типовое ДУ в ЧП	Краевые (граничные) условия	Начальные условия
1.	Параболическое	$L[u(x,t)] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(x,t)u = g(x,t)$	$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases}$	$u(x,0) = f(x),$
2.	Гиперболическое	$L[u(x,t)] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma(x,t) \times \frac{\partial u}{\partial t} - K_1(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K_2(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta(x,t)u = g(x,t)$	$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases}$	$u(x,0) = f(x),$ $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$

В таблице приведены наиболее часто используемые типы уравнений, причем уравнения также могут иметь смешанную форму. Эти типы сложны и неприменимы в практике САУ, поскольку имеют сложную математическую и методологическую основу.

В [80] представлены некоторые аппроксимирующие функции, разностные схемы и дифференциальные уравнения систем автоматического управления с распределенными параметрами.

С целью упрощения и обобщения методов исследования для аналитического решения дифференциальных уравнений в частных производных при заданных граничных и начальных условиях применяют методы: разделения переменных (Фурье), функции Грина и потенциалов.

2.2 Общая схема решения задачи синтеза линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами

Для САУ с распределенными параметрами зачастую бывает достаточно использовать упрощенную модель и представлять её в виде САУ с сосредоточенными параметрами, либо САУ с запаздыванием. В таком случае методы упрощения САУ с распределенными параметрами при определенных допущениях следует дополнить модификацией математического аппарата на базе обобщенного метода Галеркина.

Поскольку элементы систем управления не всегда имеют гладкие статические характеристики, на практике необходимо применять различные методы аппроксимации. В работах [81-90] рассмотрены различные методы аппроксимации статических характеристик элементов систем, даны рекомендации выбора оптимального метода аппроксимации для адекватного воспроизведения процесса функционирования исследуемой САУ.

Таким образом, целесообразно модифицировать обобщенный метод Галеркина для решения задачи синтеза нового класса систем управления – САУ с распределенными параметрами, как на линейные, так и на нелинейные, в том числе с различными видами модуляции.

Для решения задачи синтеза указанным методом используются обыкновенные дифференциальные уравнения, прямой вариационный метод обратного анализа, то есть метод ортогональной проекции. Система с распределенными параметрами содержит уравнения в частных производных. Поэтому для того, чтобы иметь возможность применить обобщенный метод Галеркина к определенному классу систем, необходимо перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

С помощью метода разделения переменных (Фурье) рассмотрим наиболее часто используемую модель звена с распределенными параметрами для

одномерного параболического дифференциального уравнения в частных производных [91-92].

Потребуется в двумерной области:

$$D = \{(x, t) \in R^2; a \leq x \leq b, t \geq 0\}, \quad (2.1)$$

найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения:

$$L[u(x, t)] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(x, t)u = g(x, t), \quad (2.2)$$

удовлетворяющее двум краевым (граничным) условиям:

$$\begin{cases} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

и начальному условию:

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.4)$$

где $K(x, t), K'_x(x, t), \beta(x, t), g(x, t), a_2(t), b_2(t)$ – заданные, непрерывные на D функции ($K(x, t) > 0$); a_0, a_1, b_0, b_1 – заданные действительные числа, причем $a_0^2 + a_1^2 > 0, b_0^2 + b_1^2 > 0$; $f(x)$ – заданная функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе с $f'(x)$ и такая, что

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = b_2(0). \end{cases} \quad (2.5)$$

Закон распределения тепла в стержне при температурах T_1 и T_2 :

$$T(x, 0) = T_1 + (\sin(\pi x) + x)(T_2 - T_1), \quad (2.6)$$

получается, как частный случай сформулированной задачи:

$$f(x) = (\sin(\pi x) + x)(T_2 - T_1) + T_1, \quad (2.7)$$

при заданных числовых значениях $a, b, K(x, t), \beta(x, t), g(x, t), a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$.

В методе Галеркина для нахождения приближенного решения задачи (2.2)–(2.5) строится функциональная последовательность $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ из приближенных решений $u_n(x, t)$ следующим образом.

Задаемся в области D некоторой системой дважды дифференцируемых функций $u_0(x,t), u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3), а приближенные функции $u_i(x) (i \geq 1)$ являются линейнонезависимыми на $[a, b]$ и удовлетворяют однородным краевым условиям:

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Получаем функцию:

$$u_n(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^n v_k(t) u_k(x) \quad (2.9)$$

с неизвестными функциями $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$, зависящими только от аргумента t .

Следует отметить, что в силу линейности условий (2.3) и (2.8), функция (2.9) удовлетворяет условиям (2.8) при любых функциях $v_1(t), \dots, v_n(t)$. Значит, следует так определить $v_i(t) (i \geq 1)$ и количество (n) этих функций, чтобы $u_n(x,t)$ из (2.9) удовлетворяла уравнению (2.2) и начальному условию (2.4) с заданной точностью.

Подставляя $u_n(x,t)$ вместо $u(x,t)$ в уравнение (2.2), получаем невязку:

$$\begin{aligned} R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t) = & \sum_{k=1}^n \frac{dv_k}{dt} u_k(x) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - K(x,t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n v_k u_k'' \right) - \\ & - \frac{\partial K}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^n v_k u_k' \right) - \beta(x,t) \left(u_0 + \sum_{k=1}^n v_k u_k \right) - g(x,t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

или

$$\begin{aligned} R_1(v_1, \dots, v_n, x, t) = & \sum_{k=1}^n u_k \frac{dv_k}{dt} - \sum_{k=1}^n \left(K u_k'' + \frac{\partial K}{\partial x} u_k' + \beta u_k \right) v_k - \\ & - \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя $u_n(x,0)$, полученную из (2.9) при $t=0$, в (2.4), находим невязку:

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x) = u_0(x,0) + \sum_{k=1}^n v_k(0) u_k(x) - f(x). \quad (2.12)$$

Невязки R_1 и R_2 являются характеристиками отклонения функции (2.6) от точного решения $U(x, t)$ задачи (2.2–2.5). При этом, если при некотором наборе

функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$ $R_1 \equiv 0$ и $R_2 \equiv 0$, то функция $u_n(x, t)$ из (2.9) – точное решение $U(x, t)$.

В общем случае эти невязки оказываются отличными от нуля. Поэтому накладываем дополнительные условия на функции $v_k(t)$ и их начальные значения $v_k(0)$ так, чтобы невязки были наименьшими.

В обобщенном методе Галеркина эти условия определяются системой уравнений:

$$(R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (2.13)$$

$$(R_2(v_1(t), \dots, v_n(0), x, t), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (2.14)$$

где $w_l(x), \dots, w_n(x)$ – заданные линейнонезависимые на $[a, b]$ приближенные функции:

$$(V(x), W(x)) = \int_a^b V(x)W(x)dx. \quad (2.15)$$

Запишем условия (2.13-2.14) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial}{\partial x} (Ku'_j) + \beta u_j \right) - \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n c_{kj}(t) v_j = b_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.17)$$

где

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x) w_k(x) dx, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (Ku'_j) + \beta u_j, w_k \right) = \int_a^b \left(Ku''_j + \frac{\partial K}{\partial x} u'_j + \beta u_j \right) w_k dx, \\ b_k(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, w_k \right) = \\ &= \int_a^b \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k dx, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если ввести в рассмотрение матрицы:

$$A = (a_{kj})_n, C = (c_{kj})_n, B = (b_k)_{n,1}, V = (v_j)_{n,1}, \quad (2.20)$$

то система (2.17) в матричном виде запишется так:

$$A \frac{dV}{dt} = CV + B \quad (2.21)$$

Покажем, что матрица A всегда невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$. Рассмотрим однородную линейную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\sum_{j=1}^n (u_j, w_k) \lambda_j = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.22)$$

Из (2.11) получим:

$$\frac{dV}{dt} = A^{-1}(CV + B). \quad (2.23)$$

Таким образом, функции $v_j(t)$ должны удовлетворять нормальной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка. Заметим, что если функции $K(x, t)$, $\beta(x, t)$ зависят только от x , то система (2.23) – система с постоянными коэффициентами.

Запишем теперь в развернутом виде условия (2.14), получим:

$$\begin{aligned} & \left(u_0(x, 0) + \sum_{j=1}^n v_j(0) u_j(x) - f(x), w_k(x) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x)) v_j(0) + (u_0(x, 0) - f(x), w_k(x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

или

$$\sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x)) v_j(0) + (f(x) - u_0(x, 0), w_k(x)), \quad k = \overline{1, n} \quad (2.25)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} v_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.26)$$

где a_{kj} определяются формулами (2.18), а

$$d_k = (f(x) - u_0(x, 0), w_k) = \int_a^b (f(x) - u_0(x, 0)) w_k(x) dx. \quad (2.27)$$

Если ввести матрицу $D=(d_k)_{n,1}$, то из (2.26) получаем:

$$V(0) = A^{-1}D. \quad (2.28)$$

Таким образом, для нахождения функций $V_k(t), k = \overline{1, n}$, определяющих приближенное решение (2.9), получаем задачу Коши для нормальной системы (2.23) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с начальными условиями (2.28). Решив указанную задачу Коши и подставив определяемые этим решением функции $v_k(t)$ в (2.9), заканчиваем построение приближенного решения $u_n(x, t)$.

В ходе решения разделяем переменные, поскольку уравнение линейное, разбиваем на сумму более простых функций, которые удовлетворяют более простым задачам. Приводим к нулевым граничным условиям, получаем две функции, одна с нулевыми граничными условиями и с начальным условием, а другая с нулевым начальным условием, но с правой частью.

Таким образом, после применения указанного метода возможности перехода от уравнений в частных производных, присущим системам с распределенными параметрами, к обыкновенным дифференциальным уравнением, появляется возможность распространить обобщенный метод Галеркина на новый класс систем. Отсюда появляется необходимость полученные в [93] рекуррентные соотношения распространить на новый класс систем, САУ с распределенными параметрами.

Следующим этапом является получение передаточной функции объекта с распределенными параметрами. В ходе реализации переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям получаем матрицы решений A, B, C , которые являются матрицами пространства состояний. Для примера матрицы равны:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2], \quad (2.29)$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ – элементы матриц, полученных в ходе реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Используя изображения по Лапласу, получаем:

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p), \\ Y(p) = CX(p) + DU(p). \end{cases} \quad (2.30)$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p). \quad (2.31)$$

Тогда,

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p). \quad (2.32)$$

Получаем матричную передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1}B + D = C\Phi(p)B + D, \quad (2.33)$$

где $\Phi(t)$ – матричная экспонента, которая имеет вид:

$$\Phi(t) = e^{At}. \quad (2.34)$$

Используя полученное значение передаточной функции, находим в обобщенном виде передаточную функцию системы:

$$\begin{aligned} W(p) &= C(pI - A)^{-1}B = [c_1 \quad c_2] \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ &= [c_1 \quad c_2] \cdot \begin{bmatrix} \frac{-a_4 + p}{a_1a_4 - a_1p - a_2a_3 - a_4p + p^2} & \frac{a_2}{a_1a_4 - a_1p - a_2a_3 - a_4p + p^2} \\ \frac{a_3}{a_1a_4 - a_1p - a_2a_3 - a_4p + p^2} & \frac{-a_1 + p}{a_1a_4 - a_1p - a_2a_3 - a_4p + p^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{b_1c_1p + b_2c_2p + b_1c_1a_4 + c_2a_3b_1 + b_2c_1a_2 - b_2c_2a_1}{p^2 - a_1p - a_4p + a_1a_4 - a_2a_3}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами в общем виде:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{b_1c_1p + b_2c_2p + b_1c_1a_4 + c_2a_3b_1 + b_2c_1a_2 - b_2c_2a_1}{p^2 - a_1p - a_4p + a_1a_4 - a_2a_3}. \quad (2.36)$$

Переходя к задаче синтеза технических систем обобщенным методом Галеркина, которая предполагает под собой известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{п.п.}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должна обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

«Вследствие того, что количество искомых параметров может быть любым, регулятор структурно может быть задан с избыточностью. В таком случае метод синтеза допускает часть параметров приравнять к нулю, в виду избыточности, что значительно упрощает структуру регулятора» [93].

Поиск значений параметров регулятора должен осуществляться в области их технической реализуемости:

$$c_k^- \leq c_k \leq c_k^+, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.37)$$

где c_k^+ – максимально допустимые значения варьируемых параметров; c_k^- – минимально допустимые значения варьируемых параметров.

Ограничения на грубость системы в соответствии с вариацией параметров находим исходя из:

$$\Delta = \frac{\delta c_k}{c_k} \leq \Delta^0, \quad (2.38)$$

где Δ^0 – заданное значение грубости системы; δc_k – вариации параметров, в пределах которых обеспечивается устойчивость системы.

На рисунке 2.1 показана система управления процессом нагрева стержня в печи в общем виде, где $W_{рег}$ – регулятор (например, пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД)), W_{pn} – объект управления с распределенными параметрами.

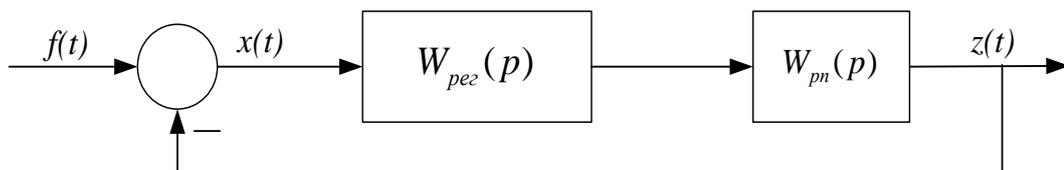


Рисунок 2.1 – Структурная схема САУ процессом нагрева в печи

Необходимо записать уравнение движения системы, которое в общем виде выглядит следующим образом:

$$Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) = f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right), \quad (2.39)$$

где $x(t)$ – координата выхода системы с распределенными; $f(t)$ – сигнал на входе системы управления, c_k – варьируемые параметры, $\bar{f}(D) = \frac{\gamma(D)}{\rho(D)}$ – обобщенные полиномы САУ с распределенными параметрами [94], $Q(c_k, D), S(c_k, D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D .

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], необходимо определить параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = \left[x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \right] 1(t), \quad (2.40)$$

где x_y – значение желаемого переходного процесса; $x^0(t)$ при $t = \infty$, для определенности задачу синтеза рассмотрим при внешнем скачкообразном воздействии $f(t) = H_1 1(t)$.

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) - f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right). \quad (2.41)$$

Значения искомых параметров c_k в таком случае определяются из условия ортогональности невязки координатным функциям:

$$\int_0^{\infty} \psi(c_k, t) \varphi_q(t) dt = 0; \quad k, q = 1, 2, \dots, m. \quad (2.42)$$

где $\varphi_q(t)$ – система из m – непрерывно дифференцируемых линейнонезависимых координатных функций.

Запишем получившиеся алгебраические уравнения в общем виде:

$$\int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\varphi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t)\varphi_q(t)dt - \int_0^{\infty} (S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D))f(t)\varphi_q(t)dt = 0, \quad (2.43)$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Дифференциальное уравнение, относительно координаты выхода системы:

$$\begin{aligned} & T_1 p (p^2 - p(a_1 + a_4) + a_1 a_4 - a_2 a_3) \cdot z(t) + \\ & + (K_1 T_1 T_2 p^2 + K_1 T_1 p + K_1) \cdot (p(b_1 c_1 + b_2 c_2) + b_1 c_1 c_4 + c_2 a_3 b_1 + b_2 c_1 a_2 - b_2 c_2 a_1) z(t) = \\ & = (K_1 T_1 T_2 p^2 + K_1 T_1 p + K_1) \cdot (p(b_1 c_1 + b_2 c_2) + b_1 c_1 c_4 + c_2 a_3 b_1 + b_2 c_1 a_2 - b_2 c_2 a_1) f(t). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Структура конкретной системы с распределенными параметрами будет определять некоторые особенности решения задачи синтеза параметров систем управления данного класса обобщенным методом Галеркина.

Таким образом, реализуя переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и используя алгоритм получения матричной передаточной функции можно решать задачу синтеза САУ обобщенным методом Галеркина.

2.3 Пример решения параметрического синтеза линейных САУ с распределенными параметрами

Рассмотрим синтез управления объектом с распределенными параметрами с обратной связью на примере процесса нагрева стержня в печи. В отличие от систем с сосредоточенными параметрами, где применяют обыкновенные дифференциальные уравнения, в системах с распределенными параметрами задача усложняется учетом нескольких переменных в пространстве состояний. Что влечет за собой ряд сложностей и как следствие недостаточную изученность, а также отсутствие эффективного математического аппарата для своевременного принятия решения.

С целью упрощения и возможностью модификации обобщенного метода Галеркина на системы с распределенными параметрами, рассмотрим классический пример перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [93, 95-101].

Поскольку в данном примере рассмотрена непрерывная система, содержащая обратную связь, необходимо и достаточно использовать пример из [102], где рассмотрено управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи. Используя данные из источника [102], выполним переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [78] и распространим полученное уравнение на обобщенный метод Галеркина.

Необходимо в двумерной области $D = \{(x,t) | a \leq x \leq b, t \geq 0\}$ найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}U - K(x,t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K(x,t) \cdot \left(\frac{d}{dx}U\right) - \beta(x,t) \cdot U = g(x,t), \quad (2.45)$$

удовлетворяющего двум краевым условиям:

$$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (2.46)$$

и начальному условию:

$$u(x,0) = f(x). \quad (2.47)$$

Рассмотрим случай, когда функции K , β , g , a_2 , b_2 не зависят от t . Введем непрерывные функции уравнения $K(x)$ ($K > 0$), $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$ и числовые параметры задачи a , b , a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 :

$$\begin{aligned} c_1 = 0,1; c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, K(x) = c_1, \beta(x) = 0, g(x) = 0, \\ a = 0, b = 2, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = c_2, b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = c_3, \\ f(x) = c_4 \cdot x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c_2, \end{aligned}$$

то есть

$$f(x) = x^2 - \frac{(\pi^2 - 1)}{\pi} + 1. \quad (2.48)$$

Например, для наглядности введем конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование: $T=1$ с.

Следующим этапом алгоритма является получение точного решения $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x)=0$, $\gamma(x)=0$, $K(x)=c_1=const$, то используя метод разделения переменных [103]:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= Q(x,t) + f(t) + \psi(t), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= K^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + f'(t) + \psi'(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

то есть изменим уравнение, сделаем его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K^2 \frac{\partial Q}{\partial x^2} - f'(t) - \psi'(t), \quad (2.50)$$

при чем:

$$Q(a_2, t) = 0, f(b_2, t) = 0,$$

тогда $U(0, t) = 0 + 0 + \psi(t) = \alpha(t)$:

$$\begin{aligned} U(b_2, t) &= 0 + f(t)b_2 + \psi(t) = \beta(t), \\ f(t) &= \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{b_2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Таким образом однородное уравнение представляем в виде неоднородного, при этом у Q изменяем граничные условия:

$$U(x, 0) = f_0(x) = Q(x, 0) + f(0)x + \psi(0) = Q(x, 0) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x + \alpha(0), \quad (2.52)$$

то есть начальные условия для функции Q :

$$\begin{aligned} Q(x, 0) &= f_0(x) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x - \alpha(0), \\ Q(a_2, t) &= 0, Q(b_2, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

далее получаем:

$$Q(x,t) = U(x,t) + V(x,t). \quad (2.54)$$

Разделим правую часть уравнения и граничные условия по разным функциям, то есть оба уравнения будут являться решением одного и того же уравнения, получим однородное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.55)$$

и неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(t)x - \psi'(t). \quad (2.56)$$

После подстановки (2.51) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t), \quad (2.57)$$

при этом $U(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x + \alpha(0)$, а $V(x,0) = 0$.

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial(U+V)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t) = \\ &= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t), \end{aligned} \quad (2.58)$$

при этом

$$Q(x,0) = U(x,0) + V(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x - \alpha(0), \quad (2.59)$$

с учетом нулевых граничных условий:

$$U(a_2,t) = 0, U(b_2,t) = 0, V(a_2,t) = 0, V(b_2,t) = 0, \quad (2.60)$$

из начальных условий:

$$U(a_2,t) = A(0)B(t) = 0, U(b_2,t) = A(l)B(t) = 0, \quad (2.61)$$

$B(t)$ не может быть равно 0, тогда U всегда будет равно 0.

Получим: $A(a_2) = 0, A(b_2) = 0$. Далее разделяем функцию на две части:

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= A(x)B(t), \\
A(x)B'(t) &= K^2 A''(x)B(t), \\
\frac{B'(t)}{K^2 B(t)} &= \frac{A''(x)}{A(x)} = M, \\
A''(x) - MA(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то

$$A_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{b_2}, \tag{2.63}$$

где $M = -\left(\frac{\pi k}{b_2}\right)^2$, поскольку $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b_2}$, при чем $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом k не может быть равно 0 и не может быть отрицательным, так как $\sqrt{-M}$ положительный:

$$\begin{aligned}
B'_k &= MK^2 \beta(t) - \left(\frac{\pi k K}{b_2}\right)^2 B_k(t), \\
B_k &= e^{-\left(\frac{\pi k K}{b_2}\right)^2 t},
\end{aligned} \tag{2.64}$$

соответственно:

$$U_k(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi k K}{a_2 - b_2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2}\right). \tag{2.65}$$

Поскольку уравнение линейное, решение существует, умножив уравнение на любой числовой множитель и сложив с другим таким решением, получим:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k c_1}{a_2 - b_2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2}\right). \tag{2.66}$$

Поскольку начальное значение $U(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x + \alpha(0)$, то

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \sum_{k=1}^M A_k \cdot e^{-c_1 \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2} t} \sin\left(\frac{k \pi x}{b-a}\right). \tag{2.67}$$

Зададим количество слагаемых, которое обеспечивает точность решения в относительных единицах, при $M=3$ точность составляет 0.001, для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=30$.

Если $a_1=0$, $b_1=0$, то функцию $U_0(x, t)$ можно взять в виде:

$$U_0(x) = \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) \cdot x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)}, \quad (2.68)$$

$$U_0(x) = 1.$$

Вычислим коэффициенты A_k :

$$i = 1 \dots M,$$

$$A_{2_{i-1}} = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx, \quad (2.69)$$

$$f(x) - U_0(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x \cdot (\pi^2 - 1)}{\pi}.$$

Соответственно, точное решение $U(x, t)$ имеет вид:

$$UT(x, t) = U_0(x) + \sum_{k=1}^M \left[A_{2_{k-1}} \cdot e^{-c_1 \cdot t \cdot \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{b-a}\right) \right]. \quad (2.70)$$

Получим матрицу U_1 точного решения, разбив отрезок $[a, b]$ на десять частей при $t=0; 0,1 T; 0,2T; \dots, T$ при $i=0 \dots 10, j=0 \dots 10$:

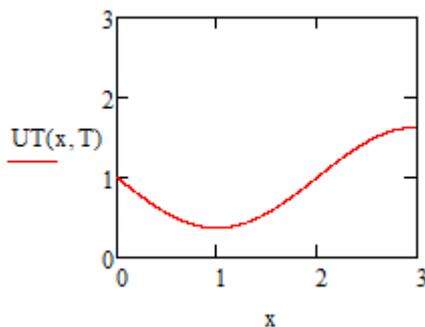
$$U_{1_{i,j}} = UT \left[a + (b-a) \cdot \frac{i}{10}, \frac{j \cdot T}{10} \right]. \quad (2.71)$$

Получим матрицу точного решения при $t=0; 0,1T; 0,2T; \dots, T$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,64 & 0,674 & 0,698 & 0,717 & 0,733 \\ 0,36 & 0,4 & 0,435 & 0,467 & 0,496 \\ 0,16 & 0,2 & 0,239 & 0,277 & 0,313 \\ 0,04 & 0,08 & 0,12 & 0,159 & 0,198 \\ -1,899 \cdot 10^{-5} & 0,04 & 0,08 & 0,12 & 0,159 \\ 0,04 & 0,08 & 0,12 & 0,159 & 0,198 \\ 0,16 & 0,2 & 0,239 & 0,277 & 0,313 \\ 0,36 & 0,4 & 0,435 & 0,467 & 0,496 \\ 0,64 & 0,674 & 0,698 & 0,717 & 0,733 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зададим переменную $n=2$, которая представляет собой количество решений.

Получим график точного решения (рисунок 2.2) при $t=T$.

Рисунок 2.2 – График точного решения $UT(x, T)$

Далее необходимо получить приближенное решение. Используя приближенные функции в следующем виде: при $k=1 \dots n$

$$V_0(k, x) = (x - a)^k \cdot (x - b). \quad (2.72)$$

Необходимо нормировать их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты и выпишем их аналитические выражения при $i=1 \dots n$:

$$VV_{i-1} = \sqrt{\int_a^b (V_0(i, x))^2 dx}. \quad (2.73)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{V_0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2)}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right], \quad (2.74)$$

$$V(0, x) = 1.$$

Введем функции $V_1(k, x)$ и $V_2(k, x)$, равные первой и второй производной от функции $V(k, x)$ при $k = 1 \dots n$:

$$V_1(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{(x - a)^k + (x - b) \cdot k \cdot (x - a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b_2 \cdot a_0 - b_0 - a_2}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right], \quad (2.75)$$

$$V_2(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{2 \cdot k \cdot (x - a)^k + (x - b) \cdot k \cdot (x - a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, 0 \right]. \quad (2.76)$$

В качестве проверочных функций возьмем приближенные $W(k, x) = V(k, x)$.

Для дальнейшего получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами введем в рассмотрение матрицы, элементы которой являются коэффициентами системы дифференциального уравнения:

$$A \cdot \left(\frac{d}{dt} H \right) = C \cdot H + B, \quad (2.77)$$

для нахождения функций $H_k(t)$ с начальными условиями $A \cdot H(0) = D_1$:

$$i = 1 \dots n, j = 1 \dots n,$$

$$B_{i-1} = \int_a^b \left(K(x) \cdot V_2(x, 0) + \frac{d}{dx} K(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(0) \cdot V(0, x) + g(x) \right) \cdot W(i, x) dx, \quad (2.78)$$

$$A_{i-1, j-1} = \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx, \quad (2.79)$$

$$C_{i-1, j-1} = \int_a^b \left[K(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(j, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} V(j, x) \right) + \beta(x) \cdot V(j, x) \right] \cdot W(i, x) dx, \quad (2.80)$$

$$D_{1 i-1} = \int_a^b (f(x) - V(0, x)) \cdot W(i, x) dx. \quad (2.81)$$

Приведем систему к виду:

$$\frac{d}{dt} \cdot H = A_1 \cdot H + B_1, \quad (2.82)$$

$$A_1 = A^{-1} \cdot C,$$

с начальными условиями:

$$H(0) = D_2, B_1 = A^{-1} \cdot B, D_2 = A^{-1} \cdot D_1. \quad (2.83)$$

Найдем решение получившейся системы дифференциальных уравнений:

$$H = D_2,$$

$$D(t, H) = A_1 + B_1, \quad (2.84)$$

$$Y_{n,k} = \begin{pmatrix} H_1(T) \\ H_2(T) \\ \dots \\ H_n(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,454 \\ 1,504 \\ -2,198 \\ 1,751 \\ -0,665 \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид:

$$U(x, 1) = U_0(x) + 2,454 U_1(x) \cdot 1,504 U_2(x) - 2,198 U_3(x) \cdot 1,751 U_4(x) - 0,665 U_5(x).$$

Найдем приближенное решение $U(x)$:

$$U(x) = V(0, x) + \sum_{k=1}^n (V(k, x) \cdot Y_{n,k}). \quad (2.85)$$

На рисунке 2.3 представлены полученные графики приближенного и точного решений.

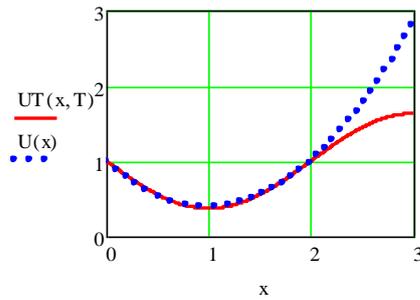


Рисунок 2.3 –Графики приближенного $U(x)$ и точного $UT(x,T)$ решений при $n=2$

Из графика видно, что при заданном количестве $n=2$ решений приближенное и точное решения совпадают, что является необходимым при реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [104-111]. Для наглядности на рисунке 2.4 показан график приближенного и точного решений при заданном количестве решений $n=3$.

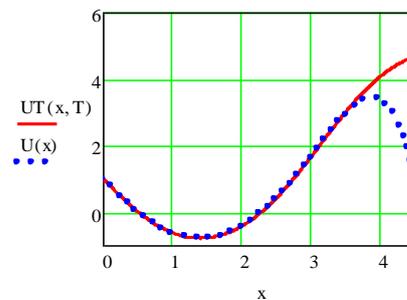


Рисунок 2.4 –Графики приближенного $U(x)$ и точного $UT(x,T)$ решений при $n=3$

Из графиков на рисунках 2.3 и 2.4 видно, что точное и приближенное решения совпадают при заданных количествах решений. Количество решений задает размерность матриц A , B , C и точность вычисления приближенного решения. Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении А, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [112].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A , B , C для нахождения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами.

Зададим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,935 \\ 0,935 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [-0,101 \quad -0,095].$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$W_{pn}(p) = C(pI - A)^{-1}B = [c_1 \quad c_2] \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \quad (2.86)$$

$$= \frac{b_1 c_1 p + b_2 c_2 p + b_1 c_1 a_4 + c_2 a_3 b_1 + b_2 c_1 a_2 - b_2 c_2 a_1}{p^2 - a_1 p - a_4 p + a_1 a_4 - a_2 a_3}.$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{pn}(p) = \frac{0,095p + 0,1894}{p^2 + 2p + 1,8742}.$$

Обратимся к задаче синтеза технических систем с помощью модифицированного обобщенного метода Галеркина, который предполагает хорошо известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается и определяется исходя из заданных показателей качества работы системы переходном режиме ($T_{п.п.}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должна обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

Используя схему из [93], объектом управления будем считать стержень, нагреваемый в печи.

На рисунке 2.5 представлена структурная схема, моделирующая непрерывную систему автоматического управления процессом нагрева стержня в печи.

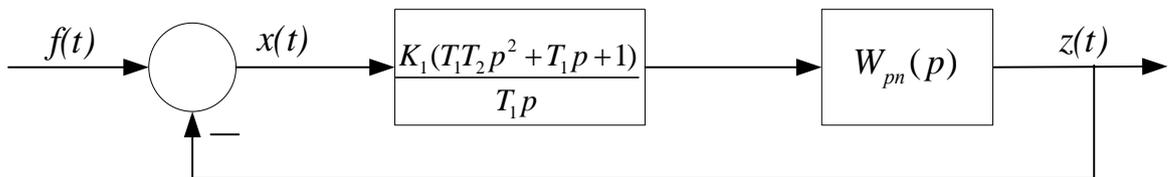


Рисунок 2.5 – Структурная схема непрерывной САУ процессом нагрева стержня в печи

Система содержит пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-регулятор), объект управления.

Запишем уравнение движения, описывающее динамику представленной системы управления:

$$Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) = S(c_k, D)f(t), \quad (2.87)$$

где $x(t)$ – координата выхода системы с распределенными; $f(t)$ – сигнал на входе системы управления, c_k – варьируемые параметры, $\bar{f}(c_k, D) = \frac{\gamma(D)}{\rho(D)}$ – обобщенные

полиномы САУ с распределенными параметрами [94], $Q(c_k, D), S(c_k, D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D .

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = [x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] 1(t), \quad (2.88)$$

где $x_y = 0,47; H_1 = 0,49; \alpha = 0,4; \beta = 21 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,454 \text{ рад}$.

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(D)x^0(t) - S(c_k, D)f(t). \quad (2.89)$$

Значения искомым параметров c_k в таком случае определяются из условия ортогональности невязки координатным функциям:

$$\int_0^{\infty} \psi(c_k, t) \varphi_q(t) dt = 0; \quad k, q = 1, 2, \dots, m, \quad (2.90)$$

где $\varphi_q(t)$ – система из m – непрерывно дифференцируемых линейнонезависимых координатных функций.

Запишем получившееся алгебраическое уравнение:

$$\int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t) \varphi_q(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(D)x^0(t) \varphi_q(t) dt - \int_0^{\infty} S(c_k, D)f(t) \varphi_q(t) dt = 0, \quad (2.91)$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Система управления описывается относительно координаты выхода следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned}
& T_1 p (p^2 - p(a_1 + a_4) + a_1 a_4 - a_2 a_3) \cdot z(t) + \\
& + (K_1 T_1 T_2 p^2 + K_1 T_1 p + K_1) \cdot (p(b_1 c_1 + b_2 c_2) + b_1 c_1 c_4 + c_2 a_3 b_1 + b_2 c_1 a_2 - b_2 c_2 a_1) z(t) = \\
& = (K_1 T_1 T_2 p^2 + K_1 T_1 p + K_1) \cdot (p(b_1 c_1 + b_2 c_2) + b_1 c_1 c_4 + c_2 a_3 b_1 + b_2 c_1 a_2 - b_2 c_2 a_1) f(t) = \\
& = 0.01 \cdot (K_1 T_1 T_2 p^2 + K_1 T_1 p + K_1) f(t).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

В процессе решения задачи синтеза параметров необходимо определить положительные значения изменяемых параметров, которые будут обеспечивать в системе перерегулирование на уровне $\sigma \leq 16\%$ при $f(t)=1(t)$ переходном процессе, времени затухания $T_{п.п.} \leq 10$ сек и выполнять требования устойчивости.

Получим графики переходного процесса системы (рисунок 2.6),

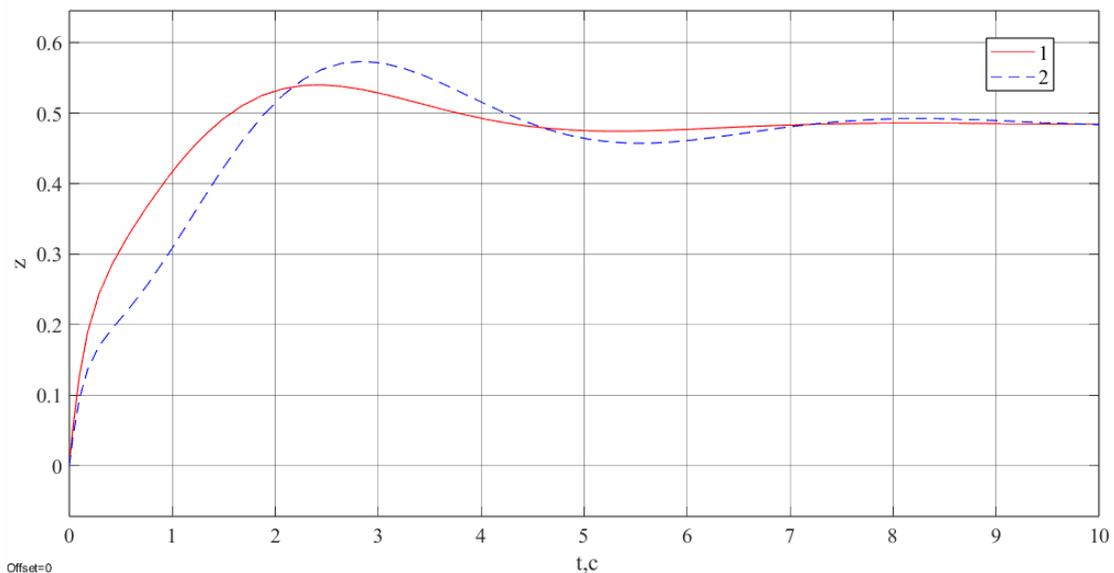


Рисунок 2.6 – График переходного процесса

где процесс 1 – желаемое программное движение, процесс 2 – переходной процесс, полученный в результате синтеза.

В результате решения задачи синтеза с помощью модифицированного обобщенного метода Галеркина получены следующие значения переменных параметров ПИД-регулятора: $T_1 = 0,51$ с; $T_2 = 0,12$ с; $K_1 = 0,244$. Полученный график переходного процесса показывает, что найденные параметры приблизительно обеспечивают заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме [104, 108-111].

2.4 Математические модели нелинейных САУ с распределенными параметрами

Для того чтобы получить уравнение движения нелинейной САУ с распределенными параметрами общего вида, необходимо провести анализ некоторых частных случаев нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Важно отметить, что, решая задачу синтеза параметров нелинейных САУ обобщенным методом Галеркина, уравнение движения обычно записывается относительно координаты входа нелинейного элемента, что как правило значительно упрощает получение необходимых рекуррентных аналитических соотношений, определяющих интегралы Галеркина [93, 95-101].

В таблице 2.2 [78] представлены примеры дифференциальных уравнений в частных производных в линейной и нелинейной постановке. В таблице наглядно показано, что уравнение движения, граничные и начальные условия, могут иметь общий вид для линейных и нелинейных систем. В то время, как уравнение динамики может различаться для одно-, двух-, n -степенных моделей.

Таблица 2.2 - типовые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных

№ п/п	Уравнение движения	Граничные условия	Начальное условие	Линейное уравнение динамики	Нелинейное уравнение динамики
1	$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$ $(x, y) \in G = \{(x, y): 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$	$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0,$ $x \in (0, x_0)$ $\varphi_x(0, y, t) = \omega(y, t),$ $y \in (a, b),$ $0 < a < b < y_0$ $\varphi_x(0, y, t) = 0,$ $y \in (0, a) \cup (b, y_0)$	$\tilde{P} - \rho \varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t),$ $y \in (0, y_0)$	$L(\omega) \equiv M \ddot{\omega} + D \omega_{yyy} + N \omega_{yyy} + \alpha \dot{\omega}_{yyy} + \beta \dot{\omega} + \gamma \omega = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0, y, t),$ $y \in (a, b)$	$L(\omega) \equiv M \ddot{\omega} + D \omega''' - \frac{3}{2} D \omega''' (\omega')^2 - 9 D \omega' \omega'' - 3 D (\omega')^3 + N \omega'' + \alpha \dot{\omega}''' - \delta \ddot{\omega}'' + \beta \dot{\omega}' + \gamma \omega + \mu \omega^3 + \varepsilon \dot{\omega}^3 - \frac{1}{2} \theta \omega'' \int_a^b (\omega')^2 dy$

Продолжение таблицы 2.2

2	$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$ $(x, y) \in G =$ $= \{(x, y): 0 < x < x_0,$ $0 < y < y_0\}$	$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x,$ $y_0, t) = 0,$ $x \in (0, x_0)$ $\varphi_x(0, y, t) = \omega(y, t),$ $y \in (a, b),$ $0 < a < b < y_0$ $\varphi_x(0, y, t) = 0,$ $y \in (0, a) \cup (b, y_0)$	$\tilde{P} - \rho \varphi_t(x_0, y, t) =$ $= P_*(y, t),$ $y \in (0, y_0)$	$L(\omega) \equiv M \ddot{\omega} + D \omega_{yyy} +$ $+ N \omega_{yyy} + \alpha \dot{\omega}_{yyy} +$ $+ \beta \dot{\omega} + \gamma \omega =$ $= P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0, y, t),$ $y \in (a, b)$	$\left\{ \begin{array}{l} -EF \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + \\ + M \ddot{u} + \alpha \dot{u}'' = 0; \\ -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + \\ + \left(\frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + \\ + M \ddot{w} + \alpha \dot{w}'''' - \delta \dot{w}'' + \\ + \beta \dot{w} + Nw' + \gamma w = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0, y, t), \\ y \in (a, b). \end{array} \right.$
---	---	--	---	---	--

Ввиду сложной математической основы для описания систем управления с распределенными параметрами, на практике зачастую рассматривают системы гидро-, трубопроводов, линии электропередач, процессы нагрева стержня и многое другое с точки зрения линейных систем.

2.5 Общая схема решения задачи синтеза нелинейных систем автоматического управления с распределенными параметрами

Как и для линейных систем автоматического управления, рассмотрим возможность распространения известного [93, 95-101] «метода параметрического синтеза, обобщенного метода Галеркина на новый класс систем, нелинейные системы автоматического управления с распределенными параметрами».

Для определенности, в качестве примера, объектом управления будем считать пластину, в составе нелинейной системы управления.

Имеем задачу пластины (рисунок 2.7) из [105-107], которая занимает положение в интервале $0 < x < l$. Вдоль оси Ox протекает сверхзвуковой поток газа со скоростью $V_0 > a_0$, где a_0 – скорость звука. Число *Маха* вычисляется по известной формуле:

$$M_0 = \frac{V_0}{a_0} > \sqrt{2}. \quad (2.93)$$

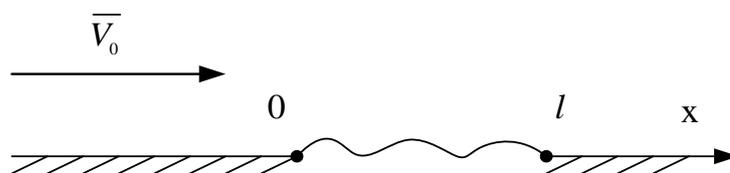


Рисунок 2.7 – Пластина с протекающим вдоль оси Ox сверхзвукового потока газа

Для решения задачи синтеза, необходимо взять функцию $u(x, y)$, которая в замкнутой, двумерной области D :

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\} \quad (2.94)$$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$K_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + K_4(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + K_5(x, y) \cdot u = f(x, y) \quad (2.95)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\pi - x)xy. \quad (2.96)$$

На границе G_D области D удовлетворяющую краевому условию:

$$u(M) \Big|_{M \in G_D} = g(M), \quad (2.97)$$

где заданы непрерывные функции - $K_1(x, y)$ ($K_1 > 0$), $K_2(x, y)$ ($K_2 > 0$), $K_3(x, y)$, $K_4(x, y)$, $K_5(x, y)$, $f(x, y)$, $g(M)$, а также численные параметры a, b, c, d , которые в случае рассмотрения пластины будут являться скоростью звука, плотностью, давлением и упругостью.

В обобщенном методе Галеркина для нахождения приближенного решения задачи (2.95-2.97) необходимо построить функциональную зависимость $\{u_n(x, y)\}_0^\infty$.

В области D необходимо задать систему дважды дифференцируемых уравнений $v_0(x, y)$, $v_1(x, y)$, ..., $v_n(x, y)$, таким образом чтобы $v_0(x, y)$ удовлетворяло краевому условию (2.97), а приближенные функции, которые в случае пластины будут описывать предварительный изгиб упругого элемента $v_i(x, y)$ ($i \geq 1$) являлись независимыми в области D и удовлетворяли граничному условию:

$$v_i(M) \Big|_{M \in G_D} = 0. \quad (2.98)$$

Получим функциональную зависимость с неизвестными на данном шаге коэффициентами c_k :

$$u_n(x, y) = v_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot v_k(x, y), \quad (2.99)$$

которая получена в ходе реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Используя разложение функции $u(x, y)$ в двойной ряд Фурье, а также метод разделения переменных [103].

Следует отметить, что в следствии нелинейности относительно $u(x, y)$ граничного условия (2.97), функция (2.99) не при всех значениях c_1, \dots, c_n удовлетворяет ему.

После подстановки $u_n(x, y)$ вместо $u(x, y)$ в уравнение (2.95), получим невязку:

$$R_n(x, y, C_1, \dots, C_n) = L[v_0] + \sum_{k=1}^n c_k L[v_k] - f(x, y), \quad (2.100)$$

где обозначим

$$L(v) \equiv K_1 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_3 \frac{\partial v}{\partial x} + K_4 \frac{\partial v}{\partial y} + K_5 \cdot v. \quad (2.101)$$

В общем виде невязка (2.100) отлична от нуля, поэтому в соответствии с обобщенным методом Галеркина, значения c_1, \dots, c_n можно определить из системы уравнений:

$$(R_n(x, y, C_1, \dots, C_n), W_k(x, y)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.102)$$

где

$$(v(x, y), g(x, y)) = \iint v(x, y) \cdot g(x, y) dx dy, \quad (2.103)$$

представляет собой скалярное произведение двух функций, $W_k(x, y)$ – непрерывно заданные функции, которые называются проверочными.

Выпишем (2.102) в развернутом виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot C_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.104)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{kj} &= (L[v_j], W_k) = \iint_D L[v_j] \cdot W_k dx dy, b_k = \\
 &= (f - L[v_0], W_k) = \iint_D f - L[v_0] \cdot W_k dx dy.
 \end{aligned}
 \tag{2.105}$$

Решая систему (2.104) и определяя таким образом C_k , получаем приближенное решение $u_n(x, y)$.

Следующим шагом является распространение обобщенного метода Галеркина на полученные, в ходе алгоритма разделения переменных, соотношения.

Предположим, что последовательность $u_n(x, y)$ сходится по точкам к $U(x, y)$. Для начала необходимо выбрать функцию $v_0(x, y)$, приближенные функции $v_1(x, y) \dots, v_n(x, y)$ и проверочные функции $W_1(x, y) \dots W_n(x, y)$. После чего найти невязку $R_0(x, y) = L[v_0] - f(x, y)$. Если $\forall (x, y) \in D: R_0(x, y) = 0$, то $v_0(x, y) = U(x, y)$, решение найдено.

В противном случае необходимо построить $u_1 = v_0(x, y) + C_1 \cdot v_1(x, y)$, определяя C_1 из решения системы (2.104) при $n=1$. Найти невязку $R_1(x, y, C_1) = L[v_0] - f(x, y) + C_1 L[v_1] = R_0(x, y) + C_1 L[v_1]$. Если $R_1(x, y, C_1) \equiv 0$, то $U = u_1(x, y)$, решение получено.

Если $R_1(x, y, C_1) \neq 0$, то необходимо найти $\max_D |u_1(x, y) - v_0(x, y)| = \Delta_1$. Если $\Delta_1 \leq \varepsilon$, где ε – это заданное значение точности приближенного решения. Таким образом можно считать, что $U(x, y) \approx u_1(x, y)$, решение получено.

Если $\Delta_1 > \varepsilon$, то необходимо перейти к вычислениям на следующем шаге.

Обобщая полученные результаты, на m шаге ($m \geq 1$) получаем функцию следующего вида:

$$u_m(x, y) = v_0(x, y) + \sum_{i=1}^m C_i v_i(x, y), \tag{2.106}$$

и невязку:

$$R_m(x, y, C_1, \dots, C_m) = R_0(x, y) + \sum_{i=1}^m C_i L(v_i). \tag{2.107}$$

Если $R_m(x, y, C_1, \dots, C_m) \equiv 0$, то $U(x, y) = u_m(x, y)$, решение найдено. Если $R_m(x, y, C_1, \dots, C_m) \neq 0$, то необходимо найти $\Delta_m = \max_D |u_m - u_{m-1}|$. Если $\Delta_m \leq \varepsilon$, то $U(x, y) \approx u_m(x, y)$, в случае если $\Delta_m > \varepsilon$, переходим к $(m+1)$ шагу.

Таким образом, в ходе решения задачи реализации перехода от нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям можно сделать вывод о том, что метод разделения переменных (Фурье) имеет единую математическую, методологическую и алгоритмическую основы, как для линейных, так и для нелинейных систем.

Обобщая результаты, полученные в разделе, следует вывод о том, что задача синтеза САУ модифицированным обобщенным методом Галеркина для систем с распределенными параметрами дополняется переходом от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнением с помощью метода разделения переменных (Фурье).

В ходе перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям получим вектор коэффициентов C_k , который описывает систему уравнений в матричном виде:

$$C = A^{-1} \cdot B. \quad (2.108)$$

В качестве примера зададим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4], \quad (2.109)$$

где a_{1-16} , b_{1-4} , c_{1-4} – элементы матриц, полученных в ходе реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Используя изображения по Лапласу, получаем:

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p), \\ Y(p) = CX(p) + DU(p). \end{cases} \quad (2.110)$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$X(p) = (pI - A)^{-1} BU(p). \quad (2.111)$$

Тогда

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1} BU(p) + DU(p). \quad (2.112)$$

Получаем матричную передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1} B + D = C\Phi(t)B + D, \quad (2.113)$$

где $\Phi(t)$ – матричная экспонента, которая имеет вид:

$$\Phi(t) = e^{At}. \quad (2.114)$$

Используя полученное значение передаточной функции, находим в обобщенном виде передаточную функцию системы:

$$\begin{aligned} W(p) &= C(pI - A)^{-1} B = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] \times \\ &\times \left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \\ &= [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] \cdot \begin{bmatrix} p - a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ -a_5 & p - a_6 & -a_7 & -a_8 \\ -a_9 & -a_{10} & p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} & p - a_{16} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами в общем виде:

$$W_{\text{рп}}(p) = \frac{Rp^3 - Ep^2 - Hp - L}{Gp^3 + Zp^2 + Jp + N}, \quad (2.116)$$

где R, E, H, L, G, Z, J, N – численные значения, полученные в ходе реализации перехода к передаточной функции системы в общем виде.

Переходя к задаче синтеза технических систем обобщенным методом Галеркина, которая предполагает известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условий приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{\text{п.п.}}$ – время переходного процесса,

σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должна обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

«Вследствие того, что количество искомых параметров может быть любым, регулятор структурно может быть задан с избыточностью. В таком случае метод синтеза допускает часть параметров приравнять к нулю, в виду избыточности, что значительно упрощает структуру регулятора» [93].

Поиск значений параметров регулятора должен осуществляться в области их технической реализуемости:

$$c_k^- \leq c_k \leq c_k^+, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.117)$$

где c_k^+ – максимально допустимые значения варьируемых параметров; c_k^- – минимально допустимые значения варьируемых параметров.

Ограничения на грубость системы в соответствии с вариацией параметров находим исходя из:

$$\Delta = \frac{\delta c_k}{c_k} \leq \Delta^0, \quad (2.118)$$

где Δ^0 – заданное значение грубости системы; δc_k – вариации параметров, в пределах которых обеспечивается устойчивость системы.

Запишем уравнение движения системы, которое в общем виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) + R(c_k, D)F[x(t), \dot{x}(t)] + \\ + \bar{f}(c_k, D)F[x(t), \dot{x}(t)] = f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right), \end{aligned} \quad (2.119)$$

где $x(t), \dot{x}(t)$ – координата входа нелинейного звена и её первая производная; $f(t)$ – сигнал на входе САУ, c_k – варьируемые параметры; $\bar{f}(D) = \gamma(D)/\rho(D)$ – обобщенные полиномы САУ с распределенными параметрами; $Q(c_k, D), S(c_k, D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D ; $F[x(t), \dot{x}(t)]$ – функция, описывающая нелинейную характеристику.

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], необходимо определить параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = \left[x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \right] 1(t), \quad (2.120)$$

где x_y – значение желаемого переходного процесса; $x^0(t)$ при $t \rightarrow \infty$, для определенности задачу синтеза рассмотрим при внешнем скачкообразном воздействии $f(t) = H_1 1(t)$.

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\begin{aligned} \psi(c_k, t) = & Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) + R(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] + \\ & + \bar{f}(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] - f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Значения искомым параметров c_k в таком случае определяются из условия ортогональности невязки координатным функциям:

$$\int_0^{\infty} \psi(c_k, t) \varphi_q(t) dt = 0; \quad k, q = 1, 2, \dots, m, \quad (2.122)$$

где $\varphi_q(t)$ – система из m – непрерывно дифференцируемых линейнонезависимых координатных функций.

Запишем получившееся алгебраическое уравнение в общем виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t) \varphi_q(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t) \cdot \varphi_q(t) dt + \\ & + \int_0^{\infty} R(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] \cdot \varphi_q(t) dt + \\ & + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] \cdot \varphi_q(t) dt - \\ & - \int_0^{\infty} f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) \cdot \varphi_q(t) dt = 0, \end{aligned} \quad (2.123)$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Структура конкретной системы с распределенными параметрами будет определять некоторые особенности решения задачи синтеза параметров систем управления данного класса обобщенным методом Галеркина.

Таким образом, реализуя переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и

используя алгоритм получения матричной передаточной функции можно решать задачу синтеза САУ обобщенным методом Галеркина [108-111].

2.6 Пример решения задачи параметрического синтеза нелинейных непрерывных САУ с распределенными параметрами

Рассмотрим синтез управления объектом с распределенными параметрами на примере процесса деформации пластины. В отличие от систем с сосредоточенными параметрами, где применяют обыкновенные дифференциальные уравнения, в системах с распределенными параметрами задача усложняется учетом нескольких переменных в пространстве состояний. Это влечет за собой ряд сложностей и как следствие недостаточную изученность, а также отсутствие эффективного математического аппарата для своевременного принятия решения.

Объектом с распределенными параметрами будем считать пластину с протекающим вдоль оси Ox сверхзвуковым потоком газа.

С целью упрощения и модификации обобщенного метода Галеркина, рассмотрим классический пример перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и, распространение известного метода параметрического синтеза Галеркина [93, 95-101] на полученное уравнение перехода.

Поскольку в данном примере рассмотрена непрерывная система, необходимо и достаточно использовать пример из [105], где рассмотрено управление процессом деформации пластины. Используя данные из источника [102], применим переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [78].

Необходимо найти функцию, удовлетворяющую в двумерной области:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}, \quad (2.124)$$

следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\pi - x)xy, \quad (2.125)$$

или

$$\begin{aligned} K_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + K_4(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + K_5(x, y) \cdot u = f(x, y). \end{aligned} \quad (2.126)$$

с граничными условиями:

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 10$$

или

$$U(x, y) = U(a, y) = U(x, 0) = U(x, b) = d.$$

При $a=b=\pi$, $c=-1$, $d=10$ и $n=9$, зададим непрерывные функции уравнения $K_1(x, y)$, ($K_1 > 0$), $K_2(x, y)$, ($K_2 > 0$), $K_3(x, y)$, $K_4(x, y)$, $K_5(x, y)$ и численные параметры: $K_1(x, y)=1$, $K_2(x, y)=1$, $K_3(x, y)=0$, $K_4(x, y)=0$, $K_5(x, y)=0$, $a=\pi$, $b=\pi$, $c=-1$, $d=10$,

$$f(x, y) = c \cdot (a - x) \cdot x \cdot y. \quad (2.127)$$

Получим точное решение $U(x, y)$, с помощью разложения функции в двойной ряд Фурье, используя метод разделения переменных [103]:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= Q(x, y) + f(y) + \psi(y), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - (\pi - x)xy, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= K^2 \frac{\partial Q}{\partial y} + f'(y) + \psi'(y), \end{aligned} \quad (2.128)$$

то есть изменим уравнение, сделаем его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K^2 \frac{\partial Q}{\partial x^2} - f'(y) - \psi'(y), \quad (2.129)$$

при чем

$$Q(a, y) = 0, f(b, y) = 0,$$

тогда $U(0, y) = 0 + 0 + \psi(y) = \alpha(y)$, $U(b, y) = 0 + f(y)b + \psi(y) = \beta(y)$ и

$$f(y) = \frac{\beta(y) - \alpha(y)}{b}. \quad (2.130)$$

Таким образом однородное уравнение представляем в виде неоднородного, при этом у Q изменяем граничные условия:

$$\begin{aligned} U(x,0) &= f_0(x) = Q(x,0) + f(0)x + \psi(0) = \\ &= Q(x,0) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x + \alpha(0), \end{aligned} \quad (2.131)$$

то есть начальные условия для функции Q :

$$\begin{aligned} Q(x,0) &= f_0(x) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x - \alpha(0), \\ Q(a,y) &= 0, \quad Q(b,y) = 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Далее разделим правую часть уравнения и граничные условия по разным функциям:

$$Q(x,y) = U(x,y) + V(x,y), \quad (2.133)$$

то есть оба уравнения будут являться решением одного и того же уравнения, получим однородное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.134)$$

и неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(y)x - \psi'(y). \quad (2.135)$$

После подстановки (2.22) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b}x - \alpha'(y), \quad (2.136)$$

при этом

$$U(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x + \alpha(0), \quad V(x,0) = 0. \quad (2.137)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial(U+V)}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b}x - \alpha'(y) = \\ &= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b}x - \alpha'(y), \end{aligned} \quad (2.138)$$

при этом

$$Q(x,0) = U(x,0) + V(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x - \alpha(0), \quad (2.139)$$

с учетом нулевых граничных условий:

$$U(a,y) = 0, \quad U(b,y) = 0, \quad V(a,y) = 0, \quad V(b,y) = 0,$$

из начальных условий:

$$U(a,y) = H(0)B(y) = 0, \quad U(b,y) = H(l)B(y) = 0,$$

$B(t)$ не может быть равно 0, тогда U всегда будет равно 0. Получим: $H(a)=0, H(b)=0$.

Далее разделяем функцию на две части:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= H(x)B(y), \\ \frac{B'(y)}{K^2 B(y)} &= \frac{H''(x)}{H(x)} = M, \\ H''(x) - MH(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то

$$H_{km}(x) = \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ky}{b}\right), \quad (2.141)$$

где $M = -\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, поскольку $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b}$, при чем $k \in \mathbb{N}$.

Соответственно

$$U(x,y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{km} \sin\left(\frac{k \cdot \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \cdot \pi y}{b}\right). \quad (2.142)$$

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=6$ точность составляет 0,001, для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например $M=27$.

Найдем коэффициент H_{km} при $i = 1 \dots M, j = 1 \dots M$:

$$H_{i-1,j-1} = \frac{-4}{\pi^2 \cdot (i^2 + j^2)} \cdot \left(\int_0^a \int_0^b f(x,y) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot j \cdot y}{b}\right) dy dx \right). \quad (2.143)$$

Таким образом получим точное решение:

$$U(x,y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{k-1,m-1} \sin\left(\frac{k \cdot \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \cdot \pi y}{b}\right) \quad (2.144)$$

и матрицу точного решения U_1 в области D при $(i=1 \dots 10, j=1 \dots 10)$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 9,892 & 9,789 & 9,695 & 9,619 & 9,565 & 9,543 & 9,563 & 9,636 & 9,777 & 10 \\ 10 & 9,789 & 9,587 & 9,404 & 9,253 & 9,147 & 9,103 & 9,141 & 9,284 & 9,56 & 10 \\ 10 & 9,695 & 9,404 & 9,14 & 8,921 & 8,765 & 8,698 & 8,749 & 8,955 & 9,356 & 10 \\ 10 & 9,619 & 9,253 & 8,921 & 8,642 & 8,442 & 8,352 & 8,41 & 8,664 & 9,172 & 10 \\ 10 & 9,565 & 9,147 & 8,765 & 8,442 & 8,206 & 8,092 & 8,148 & 8,433 & 9,021 & 10 \\ 10 & 9,543 & 9,103 & 8,698 & 8,352 & 8,092 & 7,957 & 8 & 8,289 & 8,917 & 10 \\ 10 & 9,563 & 9,141 & 8,749 & 8,41 & 8,148 & 8 & 8,019 & 8,279 & 8,889 & 10 \\ 10 & 9,636 & 9,284 & 8,955 & 8,664 & 8,433 & 8,289 & 8,279 & 8,471 & 8,98 & 10 \\ 10 & 9,777 & 9,56 & 9,356 & 9,172 & 9,021 & 8,917 & 8,889 & 8,98 & 9,28 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы видно, что решение $\min(U_1)=7,957$, а $\max(U_1)=10$.

Далее необходимо получить приближенное решение. Для получения приближенного решения введем $n_1 = \sqrt{n}$, которая представляет собой количество решений

$$U_n = V(0,0,x,y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} C_{k,m} V(k,m,x,y). \quad (2.145)$$

При $n_1=3$ приближенные функции вида:

$$V_1(k,m,x,y) = x^k \cdot (a-x) \cdot y^m \cdot (b-y), \quad (2.146)$$

после нормирования:

$$i = 1 \dots n_1, j = 1 \dots n_1, \\ VV_{i-1,j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i,j,x,y))^2 dx dy}. \quad (2.147)$$

Получаем нормированные приближенные функции вида:

$$V(k,m,x,y) = if \left(k+m \neq 0, \frac{V_1(x,m,x,y)}{VV_{k-1,m-1}}, d \right). \quad (2.148)$$

Для получения поверочных функций, для примера возьмем приближенные функции:

$$W(k,m,x,y) = V(k,m,x,y), \quad (2.149)$$

зададим оператор, соответствующий левой части уравнения:

$$L_1(k, m, x, y, V) = K_1(x, y) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(k, m, x, y) + K_2(x, y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} V(k, m, x, y) + K_3(x, y) \cdot \frac{d}{dx} V(k, m, x, y), \quad (2.150)$$

$$L(k, m, x, y, V) = L_1(k, m, x, y, V) + K_4(x, y) \cdot \frac{d}{dy} V(k, m, x, y) + K_5(x, y) \cdot V(k, m, x, y),$$

и найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для нахождения коэффициентов приближенных решений C_k при $(i_1 = 1 \dots n_1, j_1 = 1 \dots n_1, i_2 = 1 \dots n_1, j_2 = 1 \dots n_1)$:

$$B_{i_1-1+n_1(j_1-1)} = \int_0^a \int_0^b (f(x, y) - L(0, 0, x, y, V)) \cdot W(i, j, x, y) dx dy, \quad (2.151)$$

$$A_{i_1-1+n_1(j_1-1), i_2-1+n_1(j_2-1)} = \int_0^a \int_0^b L(i_2, j_2, x, y, V) \cdot W(i, j, x, y) dx dy. \quad (2.152)$$

Для получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами введем в рассмотрение матрицы $AC=B$, элементы которой являются коэффициентами системы дифференциального уравнения:

$$C = A^{-1} \cdot B, \quad (2.153)$$

которые при $n_1=3$ равны:

$$A = \begin{pmatrix} -0,026 & -1,896 & -1,72 & -1,896 & -1,773 & -1,609 & -1,72 & -1,609 & -1,459 \\ -1,896 & -2,432 & -2,629 & -1,773 & -2,275 & -2,459 & -2,275 & -2,056 & -2,218 \\ -1,72 & -2,629 & -3,202 & -1,609 & -2,459 & -2,995 & -1,459 & -2,218 & -2,693 \\ -1,896 & -1,773 & -1,609 & -2,432 & -2,275 & -2,056 & -2,629 & -2,459 & -2,218 \\ -1,773 & -2,275 & -2,459 & -2,275 & -2,837 & -3,022 & -2,459 & -3,022 & -3,192 \\ -1,609 & -2,459 & -2,995 & -2,056 & -3,022 & -3,607 & -2,218 & -3,192 & -3,767 \\ -1,72 & -1,609 & -1,459 & -2,629 & -2,459 & -2,218 & -3,202 & -2,995 & -2,693 \\ -1,609 & -2,056 & -2,218 & -2,459 & -3,022 & -3,192 & -2,995 & -3,607 & -3,767 \\ -1,459 & -2,218 & -2,693 & -2,218 & -3,192 & -3,767 & -2,693 & -3,767 & -4,377 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -6,722 \\ -9,112 \\ -8,523 \\ -7,545 \\ -9,411 \\ -8,803 \\ -7,793 \end{pmatrix},$$

$$C = (2,115 \quad 0,932 \quad -0,602 \quad 0,415 \quad 0,72 \quad -0,465 \quad 1,037 \quad 2,274 \cdot 10^{-12} \quad -9,095 \cdot 10^{-13}).$$

Следовательно приближенное решение $U(x, y)$ при $n_1=3$ выглядит следующим образом:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (2.154)$$

Получим матрицу получившегося точного решения, разбивая область D на сто частей при $i = 0...10, j = 0...10$:

$$U_{2,i,j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (2.155)$$

Матрица приближенного решения имеет вид:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,186 & 10,357 & 10,513 & 10,651 & 10,757 & 10,816 & 10,803 & 10,687 & 10,434 & 10 \\ 10 & 10,35 & 10,672 & 10,969 & 11,227 & 11,427 & 11,534 & 11,506 & 11,286 & 10,81 & 10 \\ 10 & 10,477 & 10,919 & 11,324 & 11,677 & 11,948 & 12,092 & 12,05 & 11,748 & 11,099 & 10 \\ 10 & 10,557 & 11,075 & 11,549 & 11,962 & 12,278 & 12,445 & 12,393 & 12,039 & 11,281 & 10 \\ 10 & 10,585 & 11,128 & 11,626 & 12,06 & 12,391 & 12,565 & 12,511 & 12,139 & 11,343 & 10 \\ 10 & 10,557 & 11,075 & 11,549 & 11,962 & 12,278 & 12,445 & 12,393 & 12,039 & 11,281 & 10 \\ 10 & 10,477 & 10,919 & 11,324 & 11,677 & 11,948 & 12,092 & 12,05 & 11,748 & 11,099 & 10 \\ 10 & 10,35 & 10,672 & 10,969 & 11,227 & 11,427 & 11,534 & 11,506 & 11,286 & 10,81 & 10 \\ 10 & 10,186 & 10,357 & 10,513 & 10,651 & 10,757 & 10,816 & 10,803 & 10,687 & 10,434 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения получившихся точного и приближенного решений найдем разность получившихся матриц:

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,285 & -0,584 & -0,872 & -1,119 & -1,296 & -1,372 & -1,316 & -1,092 & -0,666 & 0 \\ 0 & -0,525 & -1,076 & -1,604 & -2,058 & -2,383 & -2,524 & -2,421 & -2,012 & -1,228 & 0 \\ 0 & -0,716 & -1,466 & -2,183 & -2,799 & -3,243 & -3,437 & -3,301 & -2,746 & -1,679 & 0 \\ 0 & -0,852 & -1,741 & -2,592 & -3,324 & -3,853 & -4,089 & -3,933 & -3,28 & -2,01 & 0 \\ 0 & -0,925 & -1,889 & -2,81 & -3,606 & -4,185 & -4,45 & -4,293 & -3,592 & -2,211 & 0 \\ 0 & -0,927 & -1,891 & -2,815 & -3,614 & -4,203 & -4,483 & -4,343 & -3,654 & -2,265 & 0 \\ 0 & -0,849 & -1,729 & -2,574 & -3,311 & -3,86 & -4,135 & -4,031 & -3,422 & -2,145 & 0 \\ 0 & -0,677 & -1,379 & -2,054 & -2,647 & -3,098 & -3,338 & -3,283 & -2,825 & -1,808 & 0 \\ 0 & -0,399 & -0,812 & -1,212 & -1,565 & -1,84 & -1,998 & -1,998 & -1,749 & -1,164 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{11} = 4,483$

Для сравнения, найдем предыдущее пробное решение при $i=1...n_1-1, j=1...n_1-1$.
 1. Используя формулу (2.151) и $i_j=1...n_1-1, j_j=1...n_1-1, i_2=1...n_1-1, j_2=1...n_1-1$.
 Используя формулу (2.152) и решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_{1k} :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,026 & -1,896 & -1,896 & -1,773 \\ -1,896 & -2,432 & -1,773 & -2,275 \\ -1,896 & -1,773 & -2,432 & -2,275 \\ -1,773 & -2,275 & -2,275 & -2,837 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1,849 \quad 2,132 \cdot 10^{-14} \quad 2,306 \quad 0].$$

Получим матрицу предыдущего (для $n_1=2$) приближенного решения, разбив область D на 100 частей при $i=0\dots 10, j=0\dots 10$:

$$UP(x, y) = if \left[n_1 \neq 1, V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{m=1}^{n_1-1} c_{1, k-1+(n_1-1)(m-1)} \cdot V(k, m, x, y), V(0, 0, x, y) \right], \quad (2.156)$$

$$U_{3, i, j} = UP \left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10} \right). \quad (2.157)$$

Построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$ при U_3 :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,176 & 10,373 & 10,567 & 10,737 & 10,861 & 10,915 & 10,879 & 10,729 & 10,443 & 10 \\ 10 & 10,314 & 10,663 & 11,008 & 11,311 & 11,53 & 11,627 & 11,562 & 11,296 & 10,788 & 10 \\ 10 & 10,412 & 10,87 & 11,324 & 11,72 & 12,008 & 12,136 & 12,05 & 11,701 & 11,034 & 10 \\ 10 & 10,47 & 11,036 & 11,513 & 11,966 & 12,295 & 12,441 & 12,343 & 12,943 & 11,182 & 10 \\ 10 & 10,49 & 10,994 & 11,576 & 12,048 & 12,391 & 12,542 & 12,441 & 12,024 & 11,231 & 10 \\ 10 & 10,47 & 11,036 & 11,513 & 11,966 & 12,295 & 12,441 & 12,343 & 12,943 & 11,182 & 10 \\ 10 & 10,412 & 10,87 & 11,324 & 11,72 & 12,008 & 12,136 & 12,05 & 11,701 & 11,034 & 10 \\ 10 & 10,314 & 10,663 & 11,008 & 11,311 & 11,53 & 11,627 & 11,562 & 11,296 & 10,788 & 10 \\ 10 & 10,176 & 10,357 & 10,567 & 10,737 & 10,861 & 10,915 & 10,879 & 10,729 & 10,443 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,009 & -0,016 & -0,054 & -0,087 & -0,103 & -0,099 & -0,076 & -0,042 & -0,009 & 0 \\ 0 & 0,036 & 0,01 & -0,04 & -0,083 & -0,103 & -0,093 & -0,057 & -0,01 & 0,022 & 0 \\ 0 & 0,065 & 0,049 & 0,0003 & -0,043 & -0,06 & -0,044 & -0,0003 & 0,048 & 0,065 & 0 \\ 0 & 0,087 & 0,08 & 0,036 & -0,004 & -0,017 & 0,004 & 0,05 & 0,096 & 0,099 & 0 \\ 0 & 0,095 & 0,092 & 0,051 & -0,12 & 3,02 \cdot 10^{-14} & 0,023 & 0,07 & 0,114 & 0,112 & 0 \\ 0 & 0,087 & 0,08 & 0,036 & -0,004 & -0,017 & 0,004 & 0,05 & 0,096 & 0,099 & 0 \\ 0 & 0,065 & 0,049 & 0,0003 & -0,043 & -0,06 & -0,044 & -0,0003 & 0,048 & 0,065 & 0 \\ 0 & 0,036 & 0,01 & -0,04 & -0,083 & -0,103 & -0,093 & -0,057 & -0,01 & 0,022 & 0 \\ 0 & 0,009 & -0,016 & -0,054 & -0,087 & -0,103 & -0,099 & -0,076 & -0,042 & -0,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{21} = 0,114$.

Далее найдем невязку полученного приближенного решения:

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} \left[c_{k-1+n_1, (m-1)} \cdot L(k, m, x, y, V) + L(0, 0, x, y, V) - f(x, y) \right]. \quad (2.158)$$

Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей:

$$U_{4i,j} = R\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (2.159)$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,04 & -0,044 & -0,048 & -0,072 & -0,121 & -0,89 & -0,253 & -0,278 & -0,215 & 0 \\ -0,221 & 2,136 & 4,465 & 6,748 & 8,979 & 11,168 & 13,34 & 15,53 & 17,791 & 20,188 & 22,8 \\ -0,376 & 3,829 & 7,957 & 12,001 & 15,97 & 19,884 & 23,78 & 27,708 & 31,731 & 35,927 & 40,387 \\ -0,478 & 5,039 & 10,442 & 15,736 & 20,937 & 26,075 & 31,194 & 36,354 & 41,627 & 47,098 & 52,87 \\ -0,535 & 5,764 & 11,93 & 17,97 & 23,907 & 29,775 & 35,625 & 41,521 & 47,57 & 53,774 & 60,328 \\ -0,554 & 6,006 & 12,426 & 18,714 & 24,895 & 31,006 & 37,099 & 43,24 & 49,507 & 55,994 & 62,809 \\ -0,535 & 5,764 & 11,93 & 17,97 & 23,907 & 29,775 & 35,625 & 41,521 & 47,57 & 53,774 & 60,328 \\ -0,478 & 5,039 & 10,442 & 15,736 & 20,937 & 26,075 & 31,194 & 36,354 & 41,627 & 47,098 & 52,87 \\ -0,376 & 3,829 & 7,957 & 12,001 & 15,97 & 19,884 & 23,78 & 27,708 & 31,731 & 35,927 & 40,387 \\ -0,221 & 2,136 & 4,465 & 6,748 & 8,979 & 11,168 & 13,34 & 15,53 & 17,791 & 20,188 & 22,8 \\ 0 & -0,04 & -0,044 & -0,048 & -0,072 & -0,121 & -0,189 & -0,253 & -0,278 & -0,215 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{31} = 62,809$.

Введем приближенные функции, в качестве которой будет функция $V_1(k, m, x, y)$, а в качестве проверочных функций возьмем многочлены Лежандра [78]:

$$V_1(k, m, x, y) = x^k \cdot (a - x) \cdot y^m \cdot (b - y). \quad (2.160)$$

Вычислим нормировочные коэффициенты при $i=1 \dots n_1, j=1 \dots n_1$:

$$VV_{i-1, j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i, j, x, y))^2 dx dy}. \quad (2.161)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, m, x, y) = \left(k + m \neq 0, \frac{V_1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right). \quad (2.162)$$

Введем проверочные функции вида:

$$P(k, t) = \left(k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right), \quad (2.163)$$

где $k=1 \dots n_1, m=1 \dots n_1$ и

$$W(k, m, x, y) = \frac{P\left(k-1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)}{\sqrt{\int_0^a \left(P\left(k-1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)\right)^2 dx}} \times \frac{P\left(m-1, \frac{2}{b} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)\right)}{\sqrt{\int_0^b \left(P\left(m-1, \frac{2}{b} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)\right)\right)^2 dy}}. \quad (2.164)$$

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (2.151) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (2.152) и решая систему уравнений $A \cdot C = B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$C = A^{-1} \cdot B, \quad (2.165)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2,026 & -1,896 & -2,349 & -1,896 & -1,773 & -2,198 & -2,349 & -2,198 & -2,553 \\ 1,492 \cdot 10^{-13} & -1,97 & -3,052 & 1,048 \cdot 10^{-13} & -1,843 & -2,855 & 1,099 \cdot 10^{-13} & -1,903 & -2,948 \\ 0,453 & 0,424 & -1,032 & 0,424 & 0,396 & -0,965 & 0,657 & 0,614 & -0,734 \\ 9,251 \cdot 10^{-14} & 9,824 \cdot 10^{-14} & 7,597 \cdot 10^{-14} & -1,97 & -1,843 & -1,903 & -3,052 & -2,855 & -2,948 \\ 5,251 \cdot 10^{-14} & 3,05 \cdot 10^{-14} & 2,674 \cdot 10^{-14} & 4,45 \cdot 10^{-14} & -1,064 & -1,648 & 6,094 \cdot 10^{-14} & -1,648 & -2,553 \\ -6,851 \cdot 10^{-14} & -3,424 \cdot 10^{-14} & -4,111 \cdot 10^{-14} & 0,734 & 0,687 & 0,03 & 1,137 & 1,064 & 0,047 \\ 0,453 & 0,424 & 0,657 & 0,424 & 0,396 & 0,614 & -1,032 & -0,965 & -0,732 \\ -1,217 \cdot 10^{-13} & 0,734 & 1,137 & -5,945 \cdot 10^{-14} & 0,687 & 1,064 & -4,498 \cdot 10^{-14} & 0,03 & 0,047 \\ 8,919 \cdot 10^{-13} & 7,765 \cdot 10^{-13} & 0,587 & 7,184 \cdot 10^{-13} & 6,997 \cdot 10^{-13} & 0,549 & 0,587 & 0,549 & 0,73 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8,117 \\ 0 \\ 3,63 \\ -4,687 \\ 0 \\ 2,096 \\ -6,972 \cdot 10^{-12} \\ 0 \\ 3,118 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix},$$

$$C = [2,013 \quad 0,92 \quad -0,594 \quad 0,465 \quad 0,797 \quad -0,515 \quad 1,075 \quad 2,973 \cdot 10^{-13} \quad -3,545 \cdot 10^{-13}].$$

Следовательно, приближенное решение $U(x, y)$ для $n_1=3$ равно:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (2.166)$$

Построим матрицу решений U_2 , разбив область D на 100 частей при $i=0 \dots 10, j=0 \dots 10$:

$$U_{2i,j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (2.167)$$

Для сравнения получившихся точного и приближенного решения найдем разность получившихся матриц при U_2 :

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,287 & -0,557 & -0,807 & -1,024 & -1,189 & -1,274 & -1,246 & -1,059 & -0,664 & 0 \\ 0 & -0,548 & -1,068 & -1,547 & -1,962 & -2,276 & -2,437 & -2,379 & -2,02 & -1,264 & 0 \\ 0 & -0,765 & -1,491 & -2,161 & -2,742 & -3,18 & -3,405 & -3,323 & -2,821 & -1,765 & 0 \\ 0 & -0,92 & -1,795 & -2,604 & -3,305 & -3,835 & -4,108 & -4,011 & -3,409 & -2,135 & 0 \\ 0 & -1 & -1,953 & -2,836 & -3,602 & -4,185 & -4,489 & -4,392 & -3,741 & -2,35 & 0 \\ 0 & -0,996 & -1,945 & -2,827 & -3,596 & -4,185 & -4,502 & -4,421 & -3,783 & -2,39 & 0 \\ 0 & -0,898 & -1,755 & -2,553 & -3,253 & -3,798 & -4,103 & -4,053 & -3,496 & -2,231 & 0 \\ 0 & -0,701 & -1,37 & -1,996 & -2,551 & -2,99 & -3,251 & -3,241 & -2,834 & -1,844 & 0 \\ 0 & -0,402 & -0,786 & -1,147 & -1,47 & -1,733 & -1,9 & -1,919 & -1,715 & -1,161 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{12} = 4,502$.

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (2.151) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$. Далее, используя формулу (2.152), и, решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 \quad (2.168)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,026 & -1,896 & -1,896 & -1,773 \\ -1,896 & -2,432 & -1,773 & -2,275 \\ -1,896 & -1,773 & -2,432 & -2,275 \\ -1,773 & -2,275 & -2,275 & -2,837 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8,117 \\ 0 \\ -4,687 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [36,808 \quad -30,654 \quad -23,538 \quad 20,445].$$

Получим матрицу предыдущего для ($n_1=2$ приближенного решения, разбив область D на 100 частей).

Используя формулу (2.152) и (2.157), построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$ при U_3 :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 12,118 & 13,259 & 13,611 & 13,367 & 12,714 & 11,845 & 10,949 & 10,216 & 9,836 & 10 \\ 10 & 13,076 & 14,741 & 15,269 & 14,932 & 14,002 & 12,752 & 11,454 & 10,381 & 9,806 & 10 \\ 10 & 13,131 & 14,842 & 15,404 & 15,09 & 14,171 & 12,918 & 11,603 & 10,497 & 9,872 & 10 \\ 10 & 12,543 & 13,955 & 14,45 & 14,237 & 13,531 & 12,542 & 11,483 & 10,564 & 10 & 10 \\ 10 & 11,57 & 12,476 & 12,836 & 12,768 & 12,391 & 11,822 & 11,18 & 10,584 & 10,151 & 10 \\ 10 & 10,472 & 10,799 & 10,996 & 11,077 & 11,059 & 10,956 & 10,784 & 10,557 & 10,291 & 10 \\ 10 & 9,507 & 9,318 & 9,36 & 9,56 & 9,846 & 10,143 & 10,38 & 10,484 & 10,382 & 10 \\ 10 & 8,934 & 8,429 & 8,361 & 8,612 & 9,058 & 9,58 & 10,057 & 10,366 & 10,388 & 10 \\ 10 & 9,012 & 8,524 & 8,431 & 8,627 & 9,007 & 9,467 & 9,901 & 10,205 & 10,273 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,939 & -2,913 & -3,109 & -2,724 & -1,961 & -1,028 & -0,14 & 0,48 & 0,605 & 0 \\ 0 & -2,739 & -4,087 & -4,318 & -3,717 & -2,579 & -1,212 & 0,66 & 0,923 & 1,019 & 0 \\ 0 & -2,67 & -3,947 & -4,103 & -3,427 & -2,225 & -0,815 & 0,469 & 1,278 & 1,248 & 0 \\ 0 & -2,004 & -2,907 & -2,925 & -2,29 & -1,254 & -0,83 & 0,939 & 1,508 & 1,307 & 0 \\ 0 & -1,005 & -1,376 & -1,235 & -0,724 & 2,824 \cdot 10^{-13} & 0,759 & 1,36 & 1,59 & 1,219 & 0 \\ 0 & 0,066 & 0,249 & 0,529 & -0,87 & 1,218 & 1,503 & 1,637 & 1,516 & 1,016 & 0 \\ 0 & 0,953 & 1,577 & 1,942 & 2,103 & 2,1 & 1,96 & 1,692 & 1,291 & 0,739 & 0 \\ 0 & 1,403 & 2,226 & 2,59 & 2,603 & 2,365 & 1,96 & 1,463 & 0,938 & 0,437 & 0 \\ 0 & 1,166 & 1,822 & 2,072 & 2,016 & 1,747 & 1,351 & 0,907 & 0,491 & 0,168 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{21} = 4,318$.

Найдем невязку, получившегося приближенного решения, используя формулу (2.158). Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей, используя формулу (2.159):

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,023 & -0,01 & 0,001 & -0,011 & -0,054 & -0,122 & -0,193 & -0,232 & -0,189 & 0 \\ -0,182 & 2,19 & 4,528 & 6,812 & 9,038 & 11,215 & 13,367 & 15,553 & 17,767 & 20,125 & 22,719 \\ -0,301 & 3,916 & 8,044 & 12,078 & 16,026 & 19,911 & 23,772 & 27,661 & 31,644 & 35,802 & 40,231 \\ -0,373 & 5,152 & 10,549 & 15,823 & 20,991 & 26,087 & 31,159 & 36,268 & 41,491 & 46,918 & 52,655 \\ -0,411 & 5,894 & 12,049 & 18,063 & 23,959 & 29,778 & 35,573 & 41,41 & 47,373 & 53,558 & 60,076 \\ -0,423 & 6,142 & 12,549 & 18,808 & 24,947 & 31,006 & 37,041 & 43,12 & 49,329 & 55,766 & 62,544 \\ -0,411 & 5,894 & 12,049 & 18,063 & 23,959 & 29,778 & 35,573 & 41,41 & 47,373 & 53,558 & 60,076 \\ -0,373 & 5,152 & 10,549 & 15,823 & 20,991 & 26,087 & 31,159 & 36,268 & 41,491 & 46,918 & 52,655 \\ -0,301 & 3,916 & 8,044 & 12,078 & 16,026 & 19,911 & 23,772 & 27,661 & 31,644 & 35,802 & 40,231 \\ -0,182 & 2,19 & 4,528 & 6,812 & 9,038 & 11,215 & 13,367 & 15,553 & 17,767 & 20,125 & 22,719 \\ 0 & -0,023 & -0,01 & 0,001 & -0,011 & -0,054 & -0,122 & -0,193 & -0,232 & -0,189 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{32} = 62,544$.

Введем приближенные функции, в качестве которой будет функция $V_1(k, m, x, y)$, а в качестве проверочных функций возьмем из [78]:

$$V_1(k, m, x, y) = \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right). \quad (2.169)$$

Нормируем их

$$VV_{i-1, j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i, j, x, y))^2 dx dy}, \quad (2.170)$$

получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, m, x, y) = \left(k + m \neq 0, \frac{V_1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right). \quad (2.171)$$

Для примера в качестве проверочных возьмем приближенные функции:

$$W(k, m, x, y) = V(k, m, x, y). \quad (2.172)$$

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (2.151) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$.
Используя формулу (2.152), и, решая систему уравнений $A \cdot C = B$, матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$C = A^{-1} \cdot B,$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \cdot 10^{-14} & 4,9 \cdot 10^{-13} & -1,6 \cdot 10^{-13} & -8,1 \cdot 10^{-15} & -1,4 \cdot 10^{-14} & 4,75 \cdot 10^{-13} & -8,5 \cdot 10^{-15} & -1,4 \cdot 10^{-13} \\ -2,1 \cdot 10^{-13} & -5 & 5,9 \cdot 10^{-13} & -1,3 \cdot 10^{-14} & -8,6 \cdot 10^{-14} & 2 \cdot 10^{-14} & -8,3 \cdot 10^{-14} & 3,8 \cdot 10^{-13} & -1,3 \cdot 10^{-13} \\ -1,7 \cdot 10^{-13} & -6,2 \cdot 10^{-13} & -10 & 5,72 \cdot 10^{-14} & 4,5 \cdot 10^{-14} & 0 & 2,8 \cdot 10^{-14} & 7,43 \cdot 10^{-14} & 9,1 \cdot 10^{-14} \\ -7 \cdot 10^{-14} & -6,8 \cdot 10^{-15} & -4,8 \cdot 10^{-14} & -5 & 1,8 \cdot 10^{-13} & 5 \cdot 10^{-13} & 7 \cdot 10^{-13} & -2,14 \cdot 10^{-14} & -3,08 \cdot 10^{-14} \\ -1,9 \cdot 10^{-14} & -5 \cdot 10^{-13} & -7,4 \cdot 10^{-14} & -2,4 \cdot 10^{-13} & -8 & 6,7 \cdot 10^{-13} & -1,8 \cdot 10^{-14} & 7,3 \cdot 10^{-13} & -2,61 \cdot 10^{-14} \\ -2,4 \cdot 10^{-14} & 7,3 \cdot 10^{-14} & 4,6 \cdot 10^{-14} & -1,7 \cdot 10^{-13} & -7,6 \cdot 10^{-13} & -13 & 1,03 \cdot 10^{-13} & 8,5 \cdot 10^{-15} & 8,04 \cdot 10^{-13} \\ -2,9 \cdot 10^{-14} & 0,7 \cdot 10^{-15} & -1,7 \cdot 10^{-14} & -7,23 \cdot 10^{-13} & -1,8 \cdot 10^{-14} & -4 \cdot 10^{-14} & -10 & -8,8 \cdot 10^{-15} & 4,5 \cdot 10^{-13} \\ -1,5410^{-14} & -2,8 \cdot 10^{-13} & 1,3 \cdot 10^{-13} & -3,5 \cdot 10^{-14} & -7 \cdot 10^{-13} & -8,41 \cdot 10^{-14} & -4,4 \cdot 10^{-13} & -13 & 7,23 \cdot 10^{-13} \\ 3,1 \cdot 10^{-15} & 1,5 \cdot 10^{-13} & -8,6 \cdot 10^{-14} & 6,7 \cdot 10^{-14} & 6,4 \cdot 10^{-14} & -7,7 \cdot 10^{-13} & -1,8 \cdot 10^{-13} & -4,5 \cdot 10^{-14} & -18 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -0,296 \\ 4 \\ 0 \\ 0,148 \\ -2,667 \\ 0 \\ -0,1 \end{bmatrix},$$

$$C^T = [4 \quad -1,684 \cdot 10^{-13} \quad 0,03 \quad -0,8 \quad -1,298 \cdot 10^{-14} \quad -0,01 \quad 0,267 \quad -1,07 \cdot 10^{-14} \quad 0,005].$$

Следовательно, приближенное решение $U(x, y)$ для $n_1=3$ равно:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (2.173)$$

Построим матрицу решений U_2 , разбив область D на 100 частей при $i=0 \dots 10, j=0 \dots 10$:

$$U_{2i,j} = U \left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10} \right). \quad (2.174)$$

Для сравнения получившихся точного и приближенного решений найдем разность получившихся матриц при U_2 :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,197 & 10,369 & 10,511 & 10,634 & 10,747 & 10,826 & 10,821 & 10,679 & 10,389 & 10 \\ 10 & 10,371 & 10,697 & 10,966 & 11,2 & 11,412 & 11,56 & 11,549 & 11,28 & 10,732 & 10 \\ 10 & 10,507 & 10,952 & 11,32 & 11,64 & 11,928 & 12,127 & 12,108 & 11,74 & 10,994 & 10 \\ 10 & 10,592 & 11,112 & 11,543 & 11,917 & 12,251 & 12,481 & 12,456 & 12,025 & 11,156 & 10 \\ 10 & 10,621 & 11,166 & 11,619 & 12,011 & 12,361 & 12,601 & 12,574 & 12,121 & 11,211 & 10 \\ 10 & 10,592 & 11,112 & 11,543 & 11,917 & 12,251 & 12,481 & 12,456 & 12,025 & 11,156 & 10 \\ 10 & 10,507 & 10,952 & 11,32 & 11,64 & 11,928 & 12,127 & 12,108 & 11,74 & 10,994 & 10 \\ 10 & 10,371 & 10,697 & 10,966 & 11,2 & 11,412 & 11,56 & 11,549 & 11,28 & 10,732 & 10 \\ 10 & 10,197 & 10,369 & 10,511 & 10,634 & 10,747 & 10,826 & 10,821 & 10,679 & 10,389 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,305 & -0,58 & -0,815 & -1,016 & -1,182 & -1,283 & -1,258 & -1,043 & -0,611 & 0 \\ 0 & -0,583 & -1,11 & -1,562 & -1,947 & -2,264 & -2,457 & -2,408 & -1,996 & -1,171 & 0 \\ 0 & -0,811 & -1,548 & -2,18 & -2,719 & -3,162 & -3,429 & -3,359 & -2,785 & -1,638 & 0 \\ 0 & -0,973 & -1,859 & -2,622 & -3,274 & -3,809 & -4,13 & -4,046 & -3,361 & -1,984 & 0 \\ 0 & -1,056 & -2,019 & -2,853 & -3,569 & -4,155 & -4,509 & -4,426 & -3,689 & -2,19 & 0 \\ 0 & -1,049 & -2,009 & -2,845 & -3,565 & -4,159 & -4,524 & -4,456 & -3,736 & -2,239 & 0 \\ 0 & -0,944 & -1,811 & -2,571 & -3,23 & -3,78 & -4,127 & -4,089 & -3,461 & -2,105 & 0 \\ 0 & -0,735 & -1,413 & -2,012 & -2,536 & -2,979 & -3,271 & -3,27 & -2,809 & -1,751 & 0 \\ 0 & -0,42 & -0,808 & -1,155 & -1,462 & -1,726 & -1,909 & -1,932 & -1,699 & -1,109 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{13} = 4,524$.

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (2.151) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$. Далее используя формулу (2.152), и, решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1, \quad (2.175)$$

$$C_1 = [4 \quad -1,673 \cdot 10^{-13} \quad -0,8 \quad 1,477 \cdot 10^{-14}]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4,038 \cdot 10^{-14} & -1,642 \cdot 10^{-13} & -8,123 \cdot 10^{-15} \\ -2,118 \cdot 10^{-13} & -5 & -1,257 \cdot 10^{-14} & -8,623 \cdot 10^{-14} \\ -7,044 \cdot 10^{-14} & -6,7 \cdot 10^{-15} & -5 & 1,775 \cdot 10^{-13} \\ -1,865 \cdot 10^{-14} & -5,342 \cdot 10^{-13} & -2,413 \cdot 10^{-13} & -8 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу предыдущего для $n_1=2$ приближенного решения, разбив область D на 100 частей, и, используя формулу (2.156) и (2.157), построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,151 & 10,313 & 10,487 & 10,656 & 10,787 & 10,841 & 10,786 & 10,612 & 10,336 & 10 \\ 10 & 10,287 & 10,595 & 10,926 & 11,248 & 11,497 & 11,599 & 11,496 & 11,164 & 10,638 & 10 \\ 10 & 10,394 & 10,819 & 11,275 & 11,717 & 12,06 & 12,201 & 12,059 & 11,603 & 10,879 & 10 \\ 10 & 10,464 & 10,963 & 11,499 & 12,019 & 12,422 & 12,588 & 12,42 & 11,884 & 11,033 & 10 \\ 10 & 10,488 & 11,012 & 11,576 & 12,122 & 12,546 & 12,721 & 12,545 & 11,981 & 11,086 & 10 \\ 10 & 10,464 & 10,963 & 11,499 & 12,019 & 12,422 & 12,588 & 12,42 & 11,884 & 11,033 & 10 \\ 10 & 10,394 & 10,819 & 11,275 & 11,717 & 12,06 & 12,201 & 12,059 & 11,603 & 10,879 & 10 \\ 10 & 10,287 & 10,595 & 10,926 & 11,248 & 11,497 & 11,599 & 11,496 & 11,164 & 10,638 & 10 \\ 10 & 10,151 & 10,313 & 10,487 & 10,656 & 10,787 & 10,841 & 10,786 & 10,612 & 10,336 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,046 & 0,056 & 0,024 & -0,021 & -0,04 & -0,015 & 0,035 & 0,067 & 0,053 & 0 \\ 0 & 0,085 & 0,102 & 0,04 & -0,048 & -0,085 & -0,039 & 0,053 & 0,115 & 0,093 & 0 \\ 0 & 0,112 & 0,133 & 0,045 & -0,077 & -0,133 & -0,075 & 0,05 & 0,137 & 0,115 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,149 & 0,044 & -0,102 & -0,17 & -0,107 & 0,036 & 0,141 & 0,123 & 0 \\ 0 & 0,133 & 0,154 & 0,043 & -0,111 & -0,185 & -0,12 & 0,029 & 0,14 & 0,124 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,149 & 0,044 & -0,102 & -0,17 & -0,07 & 0,036 & 0,141 & 0,123 & 0 \\ 0 & 0,112 & 0,133 & 0,045 & -0,077 & -0,133 & -0,075 & 0,05 & 0,137 & 0,115 & 0 \\ 0 & 0,085 & 0,102 & 0,04 & -0,048 & -0,085 & -0,039 & 0,053 & 0,115 & 0,093 & 0 \\ 0 & 0,046 & 0,056 & 0,024 & -0,021 & -0,04 & -0,015 & 0,035 & 0,067 & 0,053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{23} = 0,185$.

Найдем невязку получившегося приближенного решения, используя формулу (2.158). Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей, и, используя формулу (2.159):

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,02 & 4,282 & 6,781 & 9,25 & 11,407 & 13,258 & 15,285 & 17,709 & 21,097 & 25,115 \\ 0 & 3,561 & 7,568 & 12,01 & 16,396 & 20,209 & 23,461 & 26,852 & 31,339 & 37,415 & 44,649 \\ 0 & 4,67 & 9,927 & 15,757 & 21,513 & 26,515 & 30,778 & 35,223 & 41,114 & 49,096 & 58,602 \\ 0 & 5,349 & 11,363 & 18,026 & 24,606 & 30,332 & 35,219 & 40,314 & 47,046 & 56,146 & 66,974 \\ 0 & 5,58 & 11,848 & 18,789 & 25,644 & 31,613 & 36,714 & 42,03 & 49,042 & 58,508 & 69,764 \\ 0 & 5,894 & 11,363 & 18,026 & 24,606 & 30,332 & 35,219 & 40,314 & 47,373 & 56,146 & 66,974 \\ 0 & 5,349 & 9,927 & 15,757 & 21,513 & 26,515 & 30,778 & 35,223 & 47,046 & 49,096 & 58,602 \\ 0 & 4,67 & 7,568 & 12,01 & 16,396 & 20,209 & 23,461 & 26,852 & 31,339 & 37,415 & 44,649 \\ 0 & 2,02 & 4,282 & 6,781 & 9,25 & 11,407 & 13,258 & 15,285 & 17,709 & 21,097 & 25,115 \\ 0 & 10^{-14} & 0 & 1,7 \cdot 10^{-14} & 0 & 0 & -3,2 \cdot 10^{-15} & 1,7 \cdot 10^{-13} & 1,348 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{33} = 69,764$.

Выпишем полученные максимальные значения решений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 4,487, & \varepsilon_{21} &= 0,114, & \varepsilon_{31} &= 62,809, \\ \varepsilon_{12} &= 4,502, & \varepsilon_{22} &= 4,318, & \varepsilon_{32} &= 62,544, \\ \varepsilon_{13} &= 4,524, & \varepsilon_{23} &= 0,185, & \varepsilon_{33} &= 69,764. \end{aligned}$$

На основании полученных результатов следует вывод о том, что первая система ε_{11} , ε_{21} , ε_{31} приближенных и проверочных функций дает лучшее приближение решения дифференциального уравнения. Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении Б, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [113].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, для примера используем полученные матрицы пространства состояний A , B , C для получения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами аналогично п.п. 2.4. Зададим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -2,026 & -1,896 & -1,896 & -1,773 \\ -1,896 & -2,432 & -1,773 & -2,275 \\ -1,896 & -1,773 & -2,432 & -2,275 \\ -1,773 & -2,275 & -2,275 & -2,837 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix},$$

$$C = [1,849 \quad 2,132 \cdot 10^{-14} \quad 2,306 \quad 0].$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$\begin{aligned}
W(p) &= C(pI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1,849 & 2,132 \cdot 10^{-14} & 2,306 & 0 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,026 & -1,896 & -1,896 & -1,773 \\ -1,896 & -2,432 & -1,773 & -2,275 \\ -1,896 & -1,773 & -2,432 & -2,275 \\ -1,773 & -2,275 & -2,275 & -2,837 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1,849 & 2,132 \cdot 10^{-14} & 2,306 & 0 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} p + 2,026 & 1,896 & 1,896 & 1,773 \\ 1,896 & p + 2,432 & 1,773 & 2,275 \\ 1,896 & 1,773 & p + 2,432 & 2,275 \\ 1,773 & 2,275 & 2,275 & p + 2,837 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1,849 & 2,132 \cdot 10^{-14} & 2,306 & 0 \end{bmatrix} \times \\
&= \begin{bmatrix} \frac{10^{-3}p^2 + 0,007p + 0,0015}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,0019p - 0,0013}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,0019p - 0,0013}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,0018p + 0,0012}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} \\ \frac{-0,0019p - 0,0013}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{p^3 + 7,3p^2 + 5,7p + 0,9}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-1,8p^2 + 0,2p + 0,8}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,23p - 0,0012}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} \\ \frac{-0,0019p - 0,0013}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-1,8p^2 + 0,2p + 0,8}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{p^3 + 7,8p^2 + 5,7p + 0,9}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,23p - 0,0012}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} \\ \frac{-0,0018p + 0,0012}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,002p - 0,001}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{-0,23p - 0,0012}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} & \frac{10^{-3}p^2 + 0,006p + 0,0013}{10^{-3}p^{-3} + 0,009p^2 + 0,006p + 0,0002} \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{21.01p^3 + 153.13p^2 + 121.29p + 33.73}{0.001p^3 + 0.009p^2 + 0.005p + 0.0002}.$$

Переходя к задаче синтеза технических систем обобщенным методом Галеркина, которая предполагает известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условий приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{\text{п.п.}}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должна обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

Используя схему из [93], объектом управления будем считать пластину.

На рисунке 2.9 представлена схема, моделирующая нелинейную непрерывную систему автоматического управления процессом изгиба пластины.

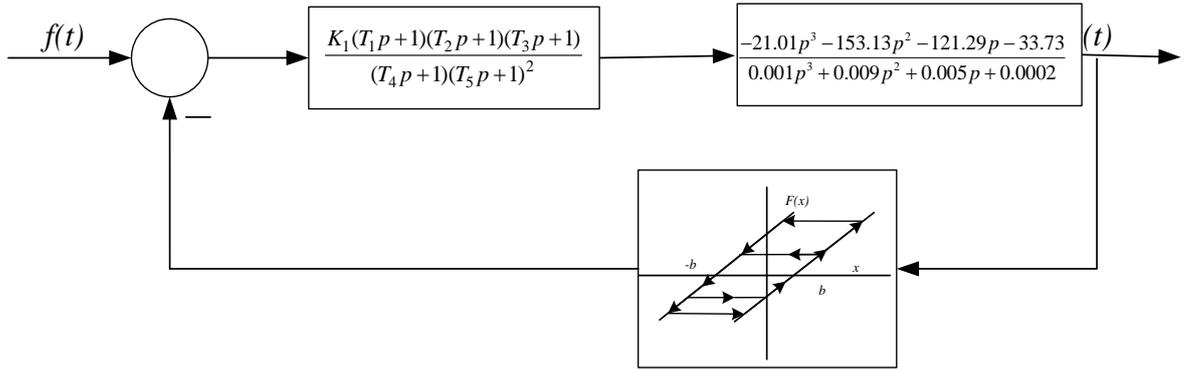


Рисунок 2.8 – Структурная схема нелинейной непрерывной САУ процессом изгиба пластины

Передаточная функция регулятора:

$$W_k(c_k, p) = \frac{K(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1)}{(T_4p + 1)(T_5p + 1)^2}, \quad (2.176)$$

где K, T_1, \dots, T_5 – варьируемые параметры системы.

Динамика системы описывается следующим уравнением движения:

$$Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) + R(c_k, D) \cdot F[x(t), \dot{x}(t)] + \bar{f}(c_k, D) \cdot F[x(t), \dot{x}(t)] = f(t) \cdot (S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)), \quad (2.177)$$

где $Q(c_k, p), S(c_k, p), \bar{f}(D), R(c_k, D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D .

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями изложенными в [93], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = [x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] 1(t), \quad (2.178)$$

где $x_y = 1; H_1 = 1,1; \alpha = 10; \beta = 21 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,5 \text{ рад}$.

В соответствии с алгоритмом в п.п. 2.5 запишем невязку:

$$\psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) + R(c_k, D) \cdot F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] + \bar{f}(c_k, D) \cdot F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] - f(t) \cdot (S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)). \quad (2.179)$$

Система управления описывается относительно координаты входа нелинейного звена следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & \left((T_4 p + 1)(T_5 p + 1)^2 \cdot (0,001 p^3 + 0,009 p^2 + 0,005 p + 0,0002) \right) x(t) + \\ & + K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) (21,01 p^3 + 153,13 p^2 + 121,29 p + 33,73) \cdot F[x(t)] = \\ & = \left((T_4 p + 1)(T_5 p + 1)^2 \cdot (0,001 p^3 + 0,009 p^2 + 0,005 p + 0,0002) \right) f(t). \end{aligned}$$

Функция $F[x(t), \dot{x}(t)]$ описывает нелинейную характеристику типа «люфт без ограничения», параметры которой заданы как $b=0,01$ рад, $k=0,01$.

Значения изменяемых параметров регулятора определим из условия обеспечения перерегулирования $\sigma \leq 20\%$, со временем затухания $T_{п.п.} \leq 0,4$ с.

Получим график переходного процесса и желаемого программного движения системы (рисунок 2.8)

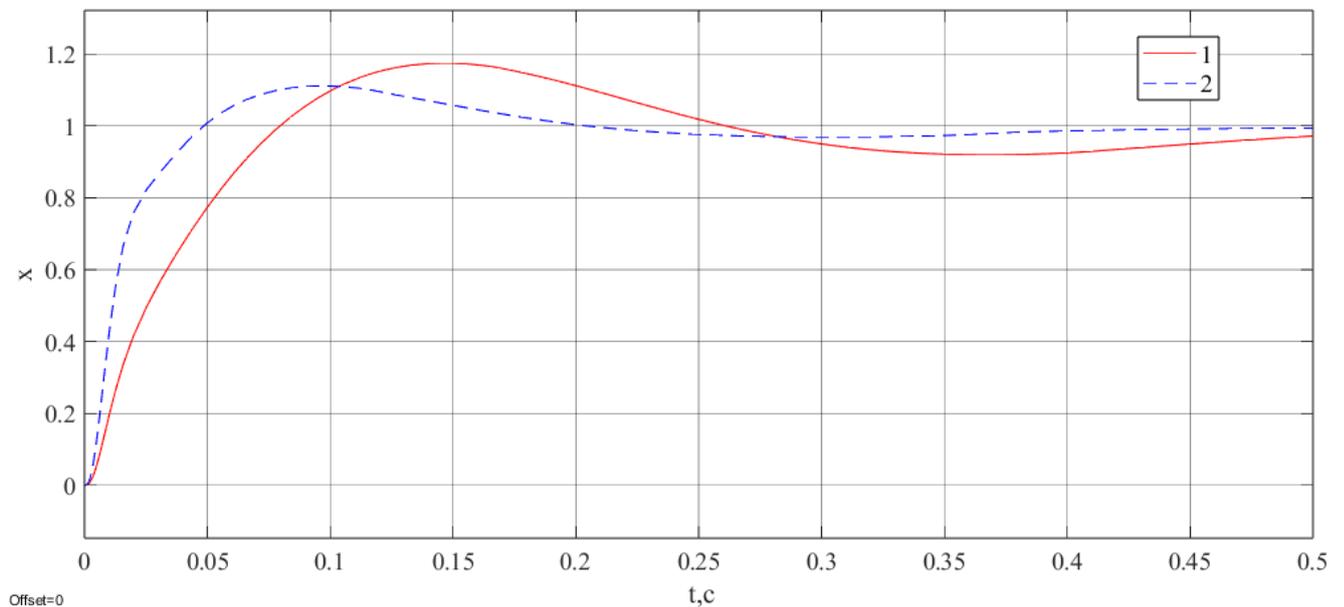


Рисунок 2.9 - График переходных процессов

где процесс 1 – желаемое программное движение, полученное в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], процесс 2 – переходной процесс, полученный в результате синтеза.

В результате решения задачи синтеза параметров определены следующие варьируемые параметры: $K=0,2$; $T_1=0,02$ с; $T_2=0,125$ с; $T_3=0,1$ с; $T_4=2$ с, $T_5=0,0025$ с.

Полученный график переходного процесса показывает, что найденные параметры приближенно обеспечивают заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме [108-111].

2.7 Выводы

По материалам раздела могут быть сделаны следующие выводы:

1. Проведен анализ структурной схемы линейной системы автоматического управления с распределенными параметрами, на основе которого разработан обобщенная математическая модель линейных САУ с распределенными параметрами общего вида.

2. Усовершенствован обобщенный метод Галеркина для решения задачи синтеза параметров линейных и нелинейных систем автоматического управления с распределенными параметрами. Конечно, в зависимости от изменений параметров гарантируется устойчивость и грубость синтезируемой САУ в соответствии с вариацией параметров. В вычислительном плане задача синтеза сводится к реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и, к задаче программирования с целевой функцией, построенной на основе уравнений Галеркина.

3. С помощью разработанного метода, алгоритмов и программ решены задачи синтеза систем с распределенными параметрами.

Основные результаты, полученные в данном разделе, опубликованы автором в работах [79-92, 104, 108-114].

3 СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

В представленном разделе метод разделения переменных (Фурье) и обобщенный метод Галеркина модифицируется для импульсных линейных и нелинейных систем автоматического управления с распределенными параметрами, которые являются широким классом систем, в том числе с регуляторами.

3.1 Математическая модель импульсных линейных систем с распределенными параметрами в частных производных

В [114] предложена модель распределенного блока, под которым подразумевают устройство любой природы, где выделены вход и выход (рисунок 3.1), и $\rho \in D_1$, $x \in D_2$, D_1 и D_2 – подобласти пространства D .

Рассмотрим линейные распределённые блоки, которые связывают входное воздействие $\omega(\rho, t)$ и функцию выхода $Q(x, t)$:

$$Q(x, t) = \int_{t_0}^t \int_{D_1} G(x, t, \rho, \tau) \cdot \omega(\rho, \tau) d\rho d\tau, \quad (3.1)$$

где $G(x, t, \rho, \tau)$ – функция Грина (импульсная переходная функция).

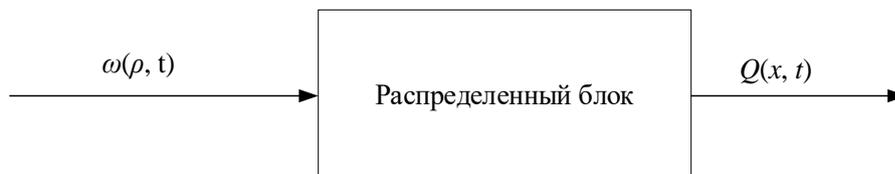


Рисунок 3.1 - Структурная схема распределенного блока

На вход распределённого блока поступает единичное импульсное воздействие, которое приложено к точке ρ_0 в момент времени τ_0 ($\omega(\rho, \tau) = \delta(\rho - \rho_0) \delta(\tau - \tau_0)$), функция выхода имеет вид:

$$Q(x, t) = \int_{\tau_0}^t \int_D G(x, t, \rho, \tau) \cdot \delta(\rho - \rho_0) \delta(\tau - \tau_0) d\rho d\tau = G(x, t, \rho_0, \tau_0). \quad (3.2)$$

В таком случае интегральное соотношение функции выхода можно задать:

$$Q(x, t) = G(x, t, \rho, \tau) \bar{\otimes} \omega(\rho, \tau), \quad (3.3)$$

где математический знак $\bar{\otimes}$ подразумевает интегрирование двух функций по параметрам $\rho \in D_1$ и τ .

В случае, когда параметры распределенного объекта не изменяются во времени, распределенный блок считают стационарным. Импульсная переходная функция блока в таком случае имеет вид:

$$G(x, t, \rho, \tau) = G(x, \rho, t - \tau). \quad (3.4)$$

Поскольку стационарные блоки с распределенными параметрами принято записывать в терминах преобразования Лапласа $f(x, t)$ и функции Грина $G(x, \rho, t)$, получим:

$$\bar{f}(x, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt, \quad (3.5)$$

$$W(x, \rho, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) G(x, \rho, t) dt, \quad (3.6)$$

где $W(x, \rho, p)$ – передаточная функция блока с распределенными параметрами.

С помощью преобразований Лапласа блок с распределенными параметрами по времени можно записать в виде:

$$\bar{Q}(x, p) = \int_{D_1} W(x, \rho, p) \bar{\omega}(\rho, p) d\rho, \quad (3.7)$$

где $\bar{Q}(x, p), \bar{\omega}(\rho, p)$ – преобразованные по Лапласу функции $Q(x, t), \omega(\xi, \tau)$.

В качестве примера рассмотрим модель импульсной системы с распределенными блоками, соединенными параллельно. Примем, что импульсная переходная функция обозначена G , а передаточная функция W [115]. Математически модель рассматриваемого объекта описана:

$$\frac{\partial Q(x, y, z, t)}{\partial t} - a^2 \left[\frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] = f(x, y, z, t), \quad (3.8)$$

$$Q(x, y, z, t) = Q_0(x, y, z),$$

$$\begin{aligned} Q(0, y, z, t) = q_1(y, z, t), Q(l_1, y, z, t) = q_2(y, z, t), Q(x, 0, z, t) = q_3(y, z, t), \\ Q(x, l_2, z, t) = q_4(x, z, t), Q(x, y, 0, t) = q_5(x, y, t), Q(x, y, l_3, t) = q_6(x, y, t), \\ 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, 0 \leq z \leq l_3, t \geq 0, a > 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$G(x, y, z, \rho, \nu, \upsilon, t) = \frac{8}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3} \cdot \sum_{k, m, n=1}^{\infty} B_{k, m, n}(\cdot) \cdot \exp \left[-a^2 \pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2} \right) \right], \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} B_{k, m, n}(\cdot) = \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{l_2} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_3} \right) \times \\ \times \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot \nu}{l_2} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot \upsilon}{l_3} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$W(x, y, z, \rho, \nu, \upsilon, p) = \frac{8}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3} \cdot \sum_{k, m, n=1}^{\infty} \frac{B_{k, m, n}(\cdot)}{p + a^2 \pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2} \right)}. \quad (3.12)$$

Поскольку рассмотрено параллельное соединение n -блоков с распределенными параметрами, функция принимает вид:

$$G(x, \rho, t, \tau) = \sum_{i=1}^n G_i(x, \rho, t, \tau), \quad (3.13)$$

и имеет следующую структурную схему (рисунок 3.2)

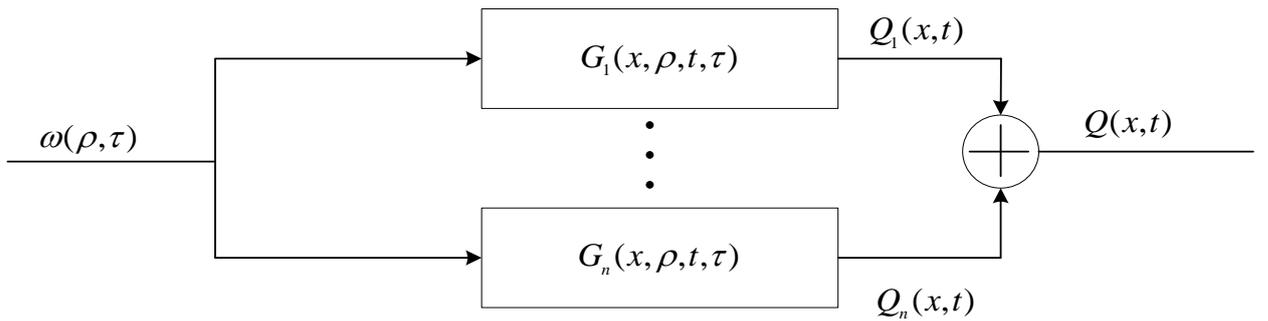


Рисунок 3.2 - Структурная схема параллельного соединения блоков с распределенными параметрами

Передаточная функция представленного объекта управления с распределенными параметрами имеет вид:

$$W(x, \rho, p) = \sum_{i=1}^n W_i(x, \rho, p). \quad (3.14)$$

В случае последовательно соединенных распределенных блоков (рисунок 3.3), импульсная переходная функция в таком случае может быть записана как:

$$G(x, \rho, t, \tau) = G_n(x, \rho, t, \tau) \bar{\otimes} G_{n-1}(x, \rho, t, \tau) \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} G_1(x, \rho, t, \tau), \quad (3.15)$$

а передаточная функция:

$$W(x, \rho, p) = \prod_{i=1}^n \otimes W_i(x, \rho, p), \quad (3.16)$$

где математический знак $\bar{\otimes}$ подразумевает интегрирование двух функций по параметрам, которые включают в себя две переменные.

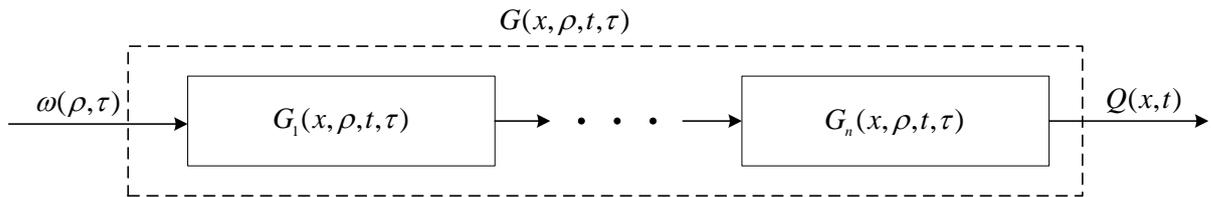


Рисунок 3.3 - Структурная схема последовательного соединения блоков с распределенными параметрами

Важно отметить, что такое представление блоков с распределенными параметрами и систем в целом оказывается удобным при моделировании. Поскольку численное моделирование в свою очередь сопровождается связью шага интегрирования во времени с параметрами дискретизации по пространственным переменным. Данная особенность накладывает на систему увеличение шага интегрирования во времени, что в свою очередь приводит к неустойчивости системы.

В следствии этого, использование функции Грина при моделировании систем с распределенными параметрами дает возможность уйти от ограничений на шаг интегрирования во времени.

Также следует отметить модальное представление объектов с распределенными параметрами. Используя математические соотношения, которые могут быть разложены по собственным вектор-функциям с целью представления передаточной функции объекта с распределенными параметрами в виде совокупности передаточных функций.

Приведем пример из [114], где рассмотрен некоторый объект, в котором происходит распределение тепла, процесс описан следующим соотношением:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (3.17)$$

при $0 < x < x_L$, $0 < y < y_L$, $0 < z < z_L$, где $T(x, y, z, \tau)$ – фазовая переменная, x, y, z – пространственные переменные, a – заданный коэффициент, x_L, y_L, z_L – задаваемые числа.

В случае систем с распределенными параметрами необходимо задать граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} T(0, y, z, \tau) = T(x, 0, z, \tau) = T(x_L, y, z, \tau) = T(x, y, z, \tau) = 0 \\ \frac{\partial T(x, y, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \\ T(x, y, z, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

На выходе системы функция описывает значение температурного поля $T(x, y, z, \tau)$, а z – задана в промежутке ($0 < z < z_L$).

С учетом граничных условий входное воздействие, разложенное в ряд Фурье, записано следующим образом:

$$U(x, y, \tau) = \sum_{\eta, \gamma=1}^{\infty} C_{\eta, \gamma}(\tau) \cdot \sin(\psi_{\eta} \cdot x) \cdot \sin(\tilde{\varphi}_{\gamma} \cdot y), \quad (3.19)$$

$$\text{где } \psi_{\eta} = \frac{\pi \cdot \eta}{x_L}; \quad \tilde{\varphi}_{\gamma} = \frac{\pi \cdot \gamma}{y_L}.$$

Реакция объекта на каждую из составляющих вида:

$$T_{\eta, \gamma}(x, y, z, \tau) = H_{\eta, \gamma}(z, \tau) \cdot \sin(\psi_{\eta} \cdot x) \cdot \sin(\tilde{\varphi}_{\gamma} \cdot y). \quad (3.20)$$

Подставляя уравнение реакции объекта в соотношение, которым описан процесс имеем:

$$\frac{\dot{H}_{\eta, \gamma}(z, \tau)}{a} + H_{\eta, \gamma}(z, \tau) \cdot (\psi_{\eta}^2 + \tilde{\varphi}_{\gamma}^2) - \frac{\partial^2 H_{\eta, \gamma}(z, \tau)}{\partial z^2} = 0, \quad (3.21)$$

при $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$.

После преобразований по Лапласу, при нулевых начальных условиях уравнение принимает вид:

$$-\frac{\partial^2 \bar{H}_{\eta, \gamma}(z, p)}{\partial z^2} + \left(\frac{p}{a} + \psi_{\eta}^2 + \tilde{\varphi}_{\gamma}^2 \right) \cdot \bar{H}_{\eta, \gamma}(z, p) = 0, \quad (3.22)$$

при $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$, где $\overline{H}_{\eta, \gamma}(z, p)$ – изображение по Лапласу функции $H_{\eta, \gamma}(z, \tau)$ при нулевых начальных условиях.

Таким образом решением уравнения является:

$$\overline{H}_{\eta, \gamma}(z, p) = D_{1, \eta, \gamma} \cdot \exp(\beta_{\eta, \gamma} \cdot z) + D_{2, \eta, \gamma} \cdot \exp(-\beta_{\eta, \gamma} \cdot z), \quad (3.23)$$

при $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$, где $\beta_{\eta, \gamma} = \left(\frac{s}{a} + \psi_{\eta}^2 + \tilde{\varphi}_{\gamma}^2 \right)^{1/2}$.

Исходя из граничных условий получаем:

$$\begin{aligned} D_{1, \eta, \gamma} &= D_{2, \eta, \gamma}, \\ D_{2, \eta, \gamma} &= \frac{\overline{C}_{\eta, \gamma}(p)}{\exp(\beta_{\eta, \gamma} \cdot z_L) + \exp(-\beta_{\eta, \gamma} \cdot z_L)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

при $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$, где $\overline{C}_{\eta, \gamma}(p)$ – представляет изображение функции $C_{\eta, \gamma}(\tau)$ по Лапласу при нулевых начальных условиях $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$.

Рассматривая реакцию объекта на каждую составляющую ряда, решение уравнения с применением граничных условий получим преобразованную по Лапласу функцию:

$$\begin{aligned} \overline{T}_{\eta, \gamma}(x, y, z, p) &= \frac{\exp(\beta_{\eta, \gamma} \cdot z) + \exp(-\beta_{\eta, \gamma} \cdot z)}{\exp(\beta_{\eta, \gamma} \cdot z_L) + \exp(-\beta_{\eta, \gamma} \cdot z_L)} \times \\ &\times \overline{C}_{\eta, \gamma}(p) \cdot \sin(\psi_{\eta} \cdot x) \cdot \sin(\varphi_{\gamma} \cdot y), \end{aligned} \quad (3.25)$$

при $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$.

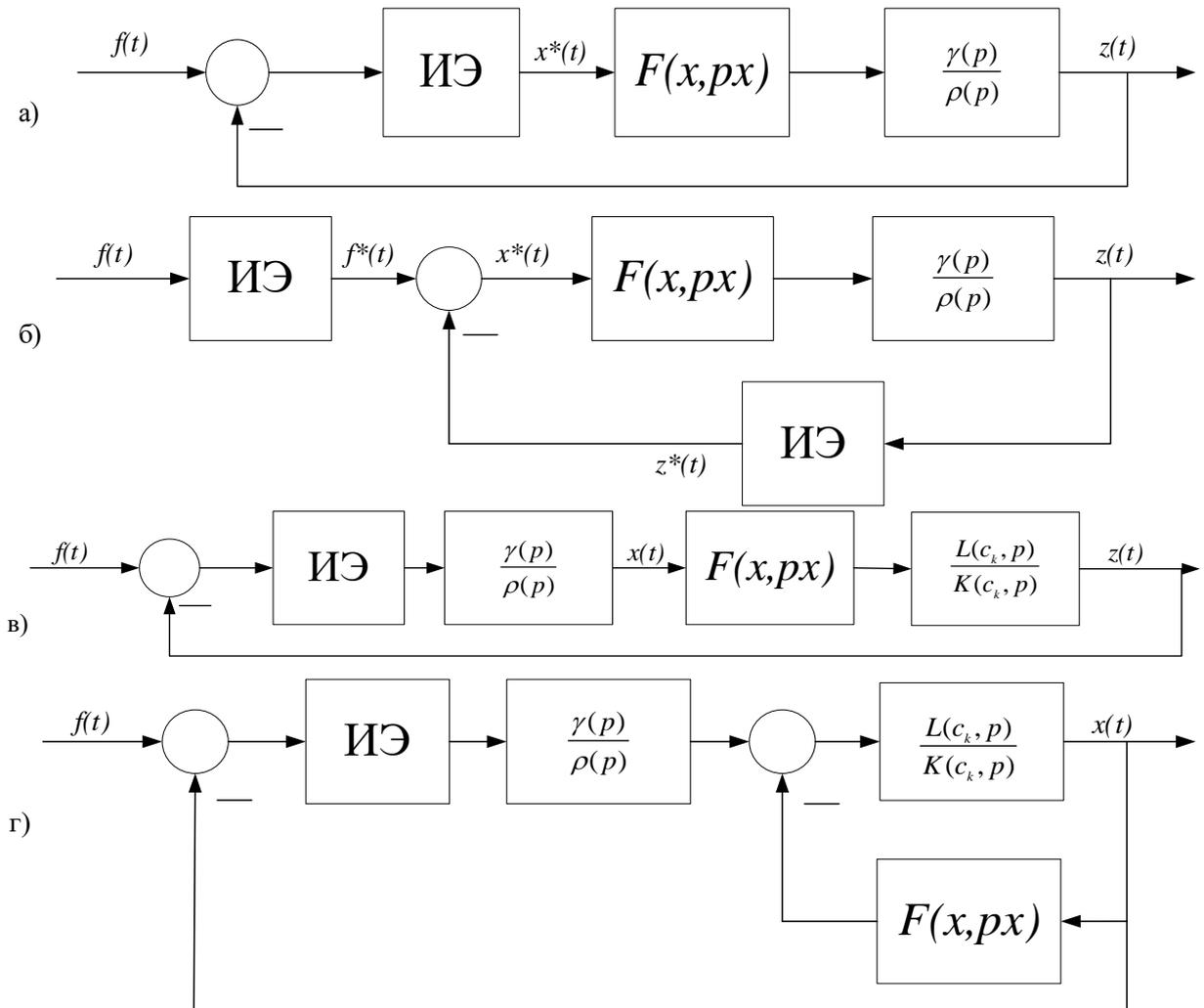
В результате объект с распределенными параметрами в представленном случае можно рассматривать как совокупность передаточных функций $W_{0, \eta, \gamma}(p)$ при нулевых начальных условиях $(\eta, \gamma = \overline{1, \infty})$.

Таким образом, изложив общий вид математической модели импульсных линейных систем с распределенными параметрами, решая задачу диссертации, необходимо реализовать переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, с целью распространения и модификации обобщенного метода Галеркина на новый класс

систем – с распределенными параметрами, как линейные, так и нелинейные, в том числе с амплитудно-импульсными модуляторами.

3.2 Формирование целевой функции для нелинейных импульсных САУ с распределенными параметрами

На рисунке 3.4 (а, б, в, г) показан сравнительный анализ структурных схем импульсных нелинейных систем автоматического управления, которые содержат один импульсный элемент и блок с распределенными параметрами.



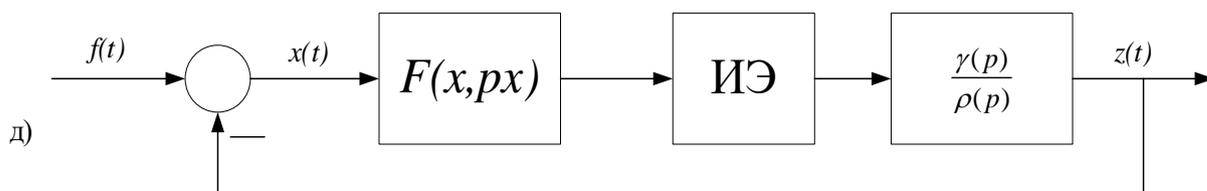


Рисунок 3.4 - Структурные схемы нелинейных импульсных САУ с распределенными параметрами

Обобщая полученные результаты в [93], с учетом блока с распределенными параметрами, который записан $\bar{f}(p) = \frac{\gamma(p)}{\rho(p)}$ – обобщенные полиномы САУ с распределенными параметрами [94], запишем уравнения движения относительно входа САУ, представленной на рисунке 3.4 (а):

$$\rho(p)x(t) + \gamma(p)F[x^*(t), \dot{x}^*(t)] = \rho(p)f(t), \quad (3.26)$$

на рисунке 3.4 - (б):

$$\rho(p)x^*(t) + \gamma(p)F[x^*(t), \dot{x}^*(t)] = \rho(p)f(t), \quad (3.27)$$

на рисунке 3.4 - (в):

$$\begin{aligned} \rho(p)K(c_k, D)x(t) + L(c_k, D)\gamma(p)F[x^*(t), \dot{x}^*(t)] = \\ = L(c_k, D)\gamma(p)f^*(t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

на рисунке 3.4 - (г):

$$\begin{aligned} \rho(p)K(c_k, D)x(t) + L(c_k, D)\gamma(p)x^*(t) + \\ + L(c_k, D)\rho(p)F[x(t), \dot{x}^*(t)] = L(c_k, D)\gamma(p)f^*(t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

на рисунке 3.4 - (д):

$$\rho(p)x(t) + \gamma(p)F[x^*(t), \dot{x}^*(t)] = \rho(p)f(t). \quad (3.30)$$

Обобщая результаты частных случаев структур САУ, показанных на рисунке 3.4, запишем в общем виде уравнение движения для систем с распределенными параметрами, содержащих модулятор и нелинейный элемент:

$$\begin{aligned} Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) + Q^*(c_k, D)x^*(t) + \bar{f}^*(c_k, D)x^*(t) + \\ + R(c_k, D)y(t) + \bar{f}(c_k, D)y(t) + R^*(c_k, D)\bar{f}^*(c_k, D)y^*(t) = \\ = f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) + f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D)), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$y(t) = F[x(t), \dot{x}(t)], \quad y^*(t) = F[x^*(t), \dot{x}^*(t)], \quad (3.32)$$

где $x(t), x^*(t)$ – исследуемая координата на входе и выходе модулятора, относительно которой записано уравнение движения синтезируемой системы; $f(t), f^*(t)$ – внешнее входное воздействие на входе и выходе модулятора; $y(t)$ – нелинейные элементы, описание которых показано в [93], $Q(c_k, D), R(c_k, D), S(c_k, D), R^*(c_k, D), Q^*(c_k, D), S^*(c_k, D), \bar{f}(D), \bar{f}^*(D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D определенные в [93].

Подробно процедура получения желаемого программного движения описана в [93], в данном подразделе метод дополнен наличием блока с распределенными параметрами.

В соответствии с известным в [93] алгоритмом образуем вектор невязки:

$$\begin{aligned} \Psi(c_k, t) = & Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) + Q^*(c_k, D)x^{0*}(t) + \\ & + \bar{f}^*(c_k, D)x^{0*}(t) + R(c_k, D)y(t) + \bar{f}(c_k, D)y(t) + \\ & + R^*(c_k, D)\bar{f}^*(c_k, D)y^*(t) - f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) - \\ & - f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Таким образом в вычислительном плане задача сводится к системе уравнений вида, в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93]:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty Q(c_k, D)x^0(t)\Phi_q(t)dt + \int_0^\infty \bar{f}(c_k, D)x^0(t)\Phi_q(t)dt + \\ & + \int_0^\infty Q^*(c_k, D)x^{0*}(t)\Phi_q(t)dt + \int_0^\infty \bar{f}^*(c_k, D)x^{0*}(t)\Phi_q(t)dt + \\ & + \int_0^\infty R(c_k, D)F[x^0(t), D\{x^0(t)\}]\Phi_q(t)dt + \\ & + \int_0^\infty \bar{f}(c_k, D)F[x^0(t), D\{x^0(t)\}]\Phi_q(t)dt + \\ & + \int_0^\infty R^*(c_k, D)\bar{f}^*(c_k, D)F[x^{0*}(t), D\{x^{0*}(t)\}]\Phi_q(t)dt - \\ & - \int_0^\infty f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D))\Phi_q(t)dt - \\ & - \int_0^\infty f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D))\Phi_q(t)dt = 0, \\ & k, q = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где Φ_q – непрерывно дифференцируемые координатные функции.

Обобщая результаты, полученные в [97-98] «целевая функция, построенная на основе уравнений Галеркина, имеет вид»:

$$J = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^m \left\{ \int_0^{\infty} \Psi_i(c_k, t) \Phi_q(t) dt \right\}^2 \quad (3.35)$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad q = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, изменяемые параметры регулятора определяются с помощью минимизации уравнения (3.35), по средством наличия известных в [95-96] «методов поиска экстремума целевой функции». «На каждой итерации необходимо проверять ограничение на устойчивость нелинейной импульсной САУ по критерию Попова В.М., который представлен в алгебраической форме в [95-96]».

3.3 Пример решения задачи синтеза параметров линейных импульсных систем с распределенными параметрами

Рассмотрим пример решения задачи синтеза параметров линейных импульсных систем с распределенными параметрами на примере процесса нагрева стержня в печи.

С целью упрощения и возможностью распространения модифицированного обобщенного метода Галеркина на системы с распределенными параметрами, рассмотрим классический пример перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [95-101].

В данном случае рассмотрена импульсная система, поэтому достаточно использовать пример из [102], где управление процессом нагрева стержня осуществляется с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связью. Используя данные из источника [102], выполним переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным

дифференциальным уравнениям [78] и распространим полученное уравнение на обобщенный метод Галеркина.

Необходимо в двумерной области $D = \{(x,t) | a \leq x \leq b, t \geq 0\}$ найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}U - K(x,t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K(x,t) \cdot \left(\frac{d}{dx}U\right) - \beta(x,t) \cdot U = g(x,t), \quad (3.36)$$

удовлетворяющее двум краевым условиям:

$$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (3.37)$$

и начальному условию:

$$u(x,0) = f(x). \quad (3.38)$$

Рассмотрим случай, когда функции K , β , g , a_2 , b_2 не зависят от t . Введем непрерывные функции уравнения $K(x)$, ($K > 0$), $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$ и числовые параметры задачи a , b , a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 :

$$\begin{aligned} c_1 = 0,2; c_2 = 1,5; c_3 = 0,5; c_4 = 1,4; K(x) = c_1; \beta(x) = 0; g(x) = 0; \\ a = 0; b = \pi; a_0 = 1; a_1 = 0; a_2 = c_2; b_0 = 1; b_1 = 0; b_2 = c_3; \end{aligned}$$

$$f(x) = c_4 \cdot x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c_2, \quad (3.39)$$

то есть:

$$f(x) = x^2 - \frac{(\pi^2 - 1)}{\pi} + 1. \quad (3.40)$$

Например, для наглядности введем конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование: $T=1$ с.

Следующим этапом алгоритма является получение точного решения $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x)=0$, $\gamma(x)=0$, $K(x)=c_1=const$, то используя метод разделения переменных [103]:

$$\begin{aligned}
 U(x,t) &= Q(x,t) + f(t) + \psi(t), \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial U}{\partial t} &= K^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + f'(t) + \psi'(t),
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

то есть изменим уравнение, сделаем его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K^2 \frac{\partial Q}{\partial x^2} - f'(t) - \psi'(t), \tag{3.42}$$

при чем $Q(a_2, t) = 0$, $f(b_2, t) = 0$, тогда

$$U(0, t) = 0 + 0 + \psi(t) = \alpha(t), U(b_2, t) = 0 + f(t)b_2 + \psi(t) = \beta(t) \tag{3.43}$$

$$f(t) = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{b_2}. \tag{3.44}$$

Таким образом однородное уравнение представляем в виде неоднородного, при этом у Q изменяем граничные условия:

$$\begin{aligned}
 U(x, 0) &= f_0(x) = Q(x, 0) + f(0)x + \psi(0) = \\
 &= Q(x, 0) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x + \alpha(0),
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

то есть получим начальные условия для функции Q :

$$\begin{aligned}
 Q(x, 0) &= f_0(x) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x - \alpha(0), \\
 Q(a_2, t) &= 0, Q(b_2, t) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Далее разделим правую часть уравнения и граничные условия по разным функциям, то есть оба уравнения будут являться решением одного и того же уравнения:

$$Q(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \tag{3.47}$$

Получим однородное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.48}$$

и неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(t)x - \psi'(t). \tag{3.49}$$

После подстановки (3.44) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t), \quad (3.50)$$

при этом

$$U(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x + \alpha(0), \quad (3.51)$$

$$V(x,0) = 0.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial(U+V)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t) = \\ &= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t), \end{aligned} \quad (3.52)$$

при этом

$$Q(x,0) = U(x,0) + V(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x - \alpha(0), \quad (3.53)$$

с учетом нулевых граничных условий:

$$U(a_2, t) = 0, \quad U(b_2, t) = 0, \quad V(a_2, t) = 0, \quad V(b_2, t) = 0.$$

Из начальных условий $U(a_2, t) = A(0)B(t) = 0$, $U(b_2, t) = A(l)B(t) = 0$, $B(t)$ не может быть равно 0, тогда U всегда будет равно 0. Получим $A(a_2) = 0$, $A(b_2) = 0$.

Далее разделяем функцию на две части:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= A(x)B(t), \\ A(x)B'(t) &= K^2 A''(x)B(t), \\ \frac{B'(t)}{K^2 B(t)} &= \frac{A''(x)}{A(x)} = M, \\ A''(x) - MA(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то $A_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{b_2}$, где

$M = -\left(\frac{\pi k}{b_2}\right)^2$, поскольку $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b_2}$, при чем $k \in \mathbb{N}$. Таким образом k не может быть

равно 0 и не может быть отрицательным, так как $\sqrt{-M}$ положительный.

Тогда

$$B'_k = MK^2 \beta(t) - \left(\frac{\pi k K}{b_2} \right)^2 B_k(t),$$

$$B_k = e^{-\left(\frac{\pi k K}{b_2} \right)^2 t}.$$
(3.55)

Соответственно

$$U_k(x, t) = e^{-\left(\frac{\pi k K}{a_2 - b_2} \right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2} \right).$$
(3.56)

Поскольку уравнение линейное, решение существует, умножив уравнение на любой числовой множитель и сложив с другим таким решением, получим:

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k c_1}{a_2 - b_2} \right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2} \right).$$
(3.57)

Поскольку начальное значение равно:

$$U(x, 0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x + \alpha(0),$$
(3.58)

то

$$U(x, t) = U_0(x, t) + \sum_{k=1}^M A_k \cdot e^{-c_1 t \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2}} \sin\left(\frac{k \pi x}{b-a} \right).$$
(3.59)

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=3$ точность составляет 0.001, для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=15$.

Если $a_1=0$, $b_1=0$, то функцию $U_0(x, t)$ можно взять в виде:

$$U_0(x) = \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b-a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) \cdot x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b-a)},$$

$$U_0(x) = 1.$$
(3.60)

Вычислим коэффициенты A_k при $i=1..M$:

$$A_{2i-1} = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a} \right) dx,$$
(3.61)

$$f(x) - U_0(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x \cdot (\pi^2 - 1)}{\pi}. \quad (3.62)$$

Соответственно, точное решение $U(x, t)$ имеет вид:

$$UT(x, t) = U_0(x) + \sum_{k=1}^M \left[A_{2k-1} \cdot e^{-c_1 t \cdot \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{b-a}\right) \right]. \quad (3.63)$$

Получим матрицу U_1 точного решения, разбив отрезок $[a, b]$ на десять частей при $t=0; 0,1 T; 0,2T; \dots, T$:

$$i = 0 \dots 10, j = 0 \dots 10$$

$$U_{1i,j} = UT \left[a + (b-a) \cdot \frac{i}{10}, \frac{j \cdot T}{10} \right]. \quad (3.64)$$

Получим матрицу точного решения при $t=0; 0,1T; 0,2T; \dots, T$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 0,156 & 0,255 & 0,327 & 0,385 & 0,435 & 0,48 & 0,521 & 0,559 & 0,594 & 0,627 & 0,659 \\ -0,911 & -0,799 & -0,695 & -0,601 & -0,515 & -0,436 & -0,363 & -0,294 & -0,229 & -0,167 & -0,108 \\ -1,702 & -1,59 & -1,479 & -1,371 & -1,267 & -1,168 & -1,073 & -0,983 & -0,897 & -0,814 & -0,734 \\ -2,216 & -2,104 & -1,992 & -1,881 & -1,771 & -1,663 & -1,558 & -1,456 & -1,358 & -1,262 & -1,171 \\ -2,454 & -2,342 & -2,23 & -2,118 & -2,007 & -1,897 & -1,789 & -1,684 & -1,581 & -1,482 & -1,386 \\ -2,416 & -2,304 & -2,192 & -2,081 & -1,971 & -1,863 & -1,758 & -1,656 & -1,558 & -1,462 & -1,371 \\ -2,102 & -1,99 & -1,879 & -1,771 & -1,667 & -1,568 & -1,473 & -1,383 & -1,297 & -1,214 & -1,134 \\ -1,511 & -1,399 & -1,295 & -1,201 & -1,115 & -1,036 & -0,963 & -0,894 & -0,829 & -0,767 & -0,708 \\ -0,644 & -0,545 & -0,473 & -0,415 & -0,365 & -0,32 & -0,279 & -0,242 & -0,206 & -0,173 & -0,141 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Зададим переменную $n=2$, которая представляет собой количество решений.

Получим график точного решения (рисунок 3.5) при $t=T$.

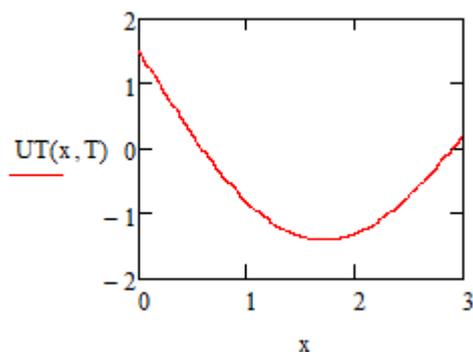


Рисунок 3.5 – График точного решения $UT(x, T)$

Далее необходимо получить приближенное решение. Используя приближенные функции при $k=1 \dots n$:

$$V_0(k, x) = (x-a)^k \cdot (x-b). \quad (3.65)$$

Необходимо нормировать их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты и выпишем их аналитические выражения:

$$i = 1 \dots n,$$

$$VV_{i-1} = \sqrt{\int_a^b (V_0(i, x))^2 dx}. \quad (3.66)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{V_0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2)}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right], \quad (3.67)$$

$$V(0, x) = 1.$$

Введем функции $V_1(k, x)$ и $V_2(k, x)$, равные первой и второй производной от функции $V(k, x)$:

$$k = 1 \dots n,$$

$$V_1(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{(x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b_2 \cdot a_0 - b_0 - a_2}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right], \quad (3.68)$$

$$V_2(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{2 \cdot k \cdot (x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, 0 \right]. \quad (3.69)$$

В качестве проверочных функций возьмем приближенные:

$$W(k, x) = V(k, x). \quad (3.70)$$

Для дальнейшего получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами, введем в рассмотрение матрицы, элементы которой являются коэффициентами системы дифференциального уравнения:

$$A \cdot \left(\frac{d}{dt} H \right) = C \cdot H + B, \quad (3.71)$$

для нахождения функций $H_k(t)$ с начальными условиями $A \cdot H(0) = D_1$, при $i = 1 \dots n, j = 1 \dots n$:

$$B_{i-1} = \int_a^b \left(K(x) \cdot V_2(x, 0) + \frac{d}{dx} K(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(0) \cdot V(0, x) + g(x) \right) \times \\ \times W(i, x) dx, \quad (3.72)$$

$$A_{i-1, j-1} = \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx, \quad (3.73)$$

$$C_{i-1,j-1} = \int_a^b \left[K(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(j,x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} V(j,x) \right) + \beta(x) \cdot V(j,x) \right] \times \\ \times W(i,x) dx, \quad (3.74)$$

$$D_{1i-1} = \int_a^b (f(x) - V(0,x)) \cdot W(i,x) dx. \quad (3.75)$$

Приведем систему к виду:

$$\frac{d}{dt} \cdot H = A_1 \cdot H + B_1, \quad (3.76)$$

$$A_1 = A^{-1} \cdot C. \quad (3.77)$$

с начальными условиями:

$$H(0) = D_2, B_1 = A^{-1} \cdot B, D_2 = A^{-1} \cdot D_1. \quad (3.78)$$

Найдем решение получившейся системы дифференциальных уравнений:

$$H = D_2, D(t, H) = A_1 + B_1, \quad (3.79)$$

$$Y_{n,k} = \begin{matrix} H_1(T) \\ H_2(T) \\ \dots \\ H_n(T) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2,439 \\ 1,323 \\ -0,683 \\ \dots \\ -0,243 \\ 0,092 \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид:

$$U(x, I) = U_0(x) + 2,439U_1(x) + 1,323U_2(x) - 0,683U_3(x) - 0,243U_4(x) + 0,092U_5(x).$$

Приближенное решение $U(x)$:

$$U(x) = V(0,x) + \sum_{k=1}^n (V(k,x) \cdot Y_{n,k}). \quad (3.80)$$

На рисунке 3.6 представлены полученные графики приближенного и точного решений.

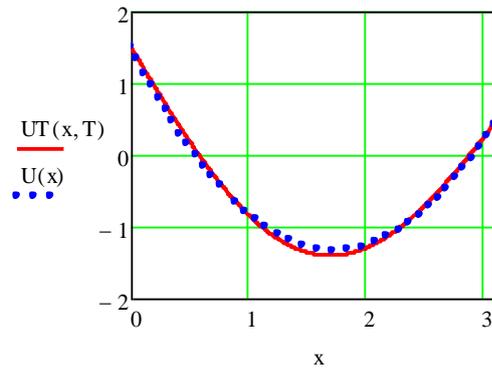


Рисунок 3.6 –Графики приближенного $U(x)$ и точного $UT(x, T)$ решений при $n=2$

Из графика видно, что при заданном количестве $n=2$ решений приближенное и точное решения совпадают, что является необходимым и достаточным при реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для наглядности на рисунке 3.7 показан график приближенного и точного решений при заданном количестве решений $n=5$.

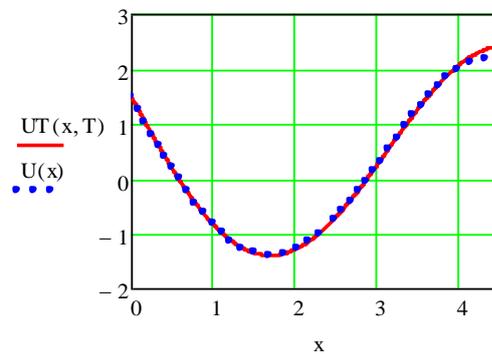


Рисунок 3.7 –Графики приближенного $U(x)$ и точного $UT(x, T)$ решений при $n=5$

Из графиков на рисунках 3.6 и 3.7 видно, что точное и приближенное решения совпадают при заданных количествах решений. Количество решений задает размерность матриц A , B , C и точность вычисления приближенного решения. Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении А, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [112].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A , B , C для нахождения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами.

Зададим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,935 \\ 0,935 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [-0,203 \quad -0,19].$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$W_{\text{пр}}(p) = C(pI - A)^{-1}B = [c_1 \quad c_2] \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \quad (3.81)$$

$$= \frac{p(b_1c_1 + b_2c_2) + b_1c_1a_4 + c_2a_3b_1 + b_2c_1a_2 - b_2c_2a_1}{p^2 - p(a_1 - a_4) + a_1a_4 - a_2a_3}.$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{0,203p + 1,98}{p^2 + 2p + 0,1258}.$$

Переходя к задаче синтеза технических систем модифицированным обобщенным методом Галеркина, которая предполагает известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условий приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{\text{п.п.}}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должна обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

Используя схему из [93], объектом управления будем считать стержень, нагреваемый в печи. На рисунке 3.8 представлена схема, моделирующая импульсную систему автоматического управления процессом нагрева стержня в печи.

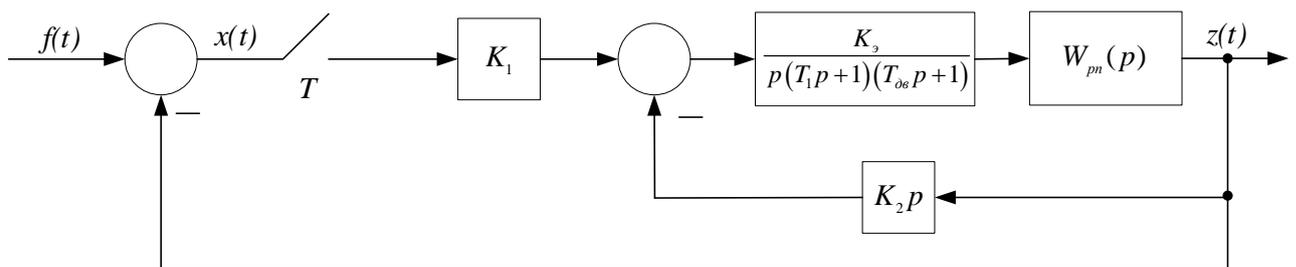


Рисунок 3.8 – Структурная схема импульсной САУ процессом нагрева стержня в печи

Уравнение движения, описывающее динамику представленной системы управления, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) + Q^*(c_k, D)x^*(t) + \bar{f}^*(c_k, D)x^*(t) = \\ = f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) + f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D)), \end{aligned} \quad (3.82)$$

где $Q(c_k, D), S(c_k, D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D .

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = [x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] 1(t), \quad (3.83)$$

где $x_y = 0,175; H_1 = 0,18; \alpha = 1; \beta = 15 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,5 \text{ рад}$.

В соответствии с общей схемой решения в п.п. 3.2 получим невязку:

$$\begin{aligned} \Psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) + Q^*(c_k, D)x^{0*}(t) + \\ + \bar{f}^*(c_k, D)x^{0*}(t) - f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) - \\ - f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D)). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Запишем получившиеся алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\Phi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t)\Phi_q(t)dt + \\ + \int_0^{\infty} Q^*(c_k, D)x^{0*}(t)\Phi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}^*(c_k, D)x^{0*}(t)\Phi_q(t)dt - \\ - \int_0^{\infty} f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D))\Phi_q(t)dt - \\ - \int_0^{\infty} f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D))\Phi_q(t)dt = 0, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$k, q = 1, 2, \dots, m,$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Система управления описывается относительно координаты выхода следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & \left[(T_1 p^2 + p)(T_{06} p^2 + p)(p^2 + 2p + 0,1248) \right] z(t) + \\ & + K_3 K_1 K_2 p(0,203p + 1,98) z^*(t) = \\ & = K_3 K_1 K_2 p(0,203p + 1,98) f^*(t), \end{aligned} \quad (3.86)$$

где $T_{дв}=0,5$; $K_3=K_{эм}K_{дв}K_{ред}=240$.

С учетом известных значений получим:

$$(48,72 \cdot K_1 K_2 p^2 + 475,2 K_1 K_2 p) f^*(t). \quad (3.87)$$

В ходе решения задачи синтеза необходимо, чтобы $K_1 > 0$, $T_1 > 0$, $K_2 > 0$ обеспечивали устойчивость САУ при $T=0,2$ и внешнем скачкообразном воздействии $f(t)=1(t)$, переходной процесс с перерегулированием на уровне $\sigma \approx 31\%$ и время затухания $T_{п.п} \approx 4$ с.

Получим график переходного процесса системы (рисунок 3.9),

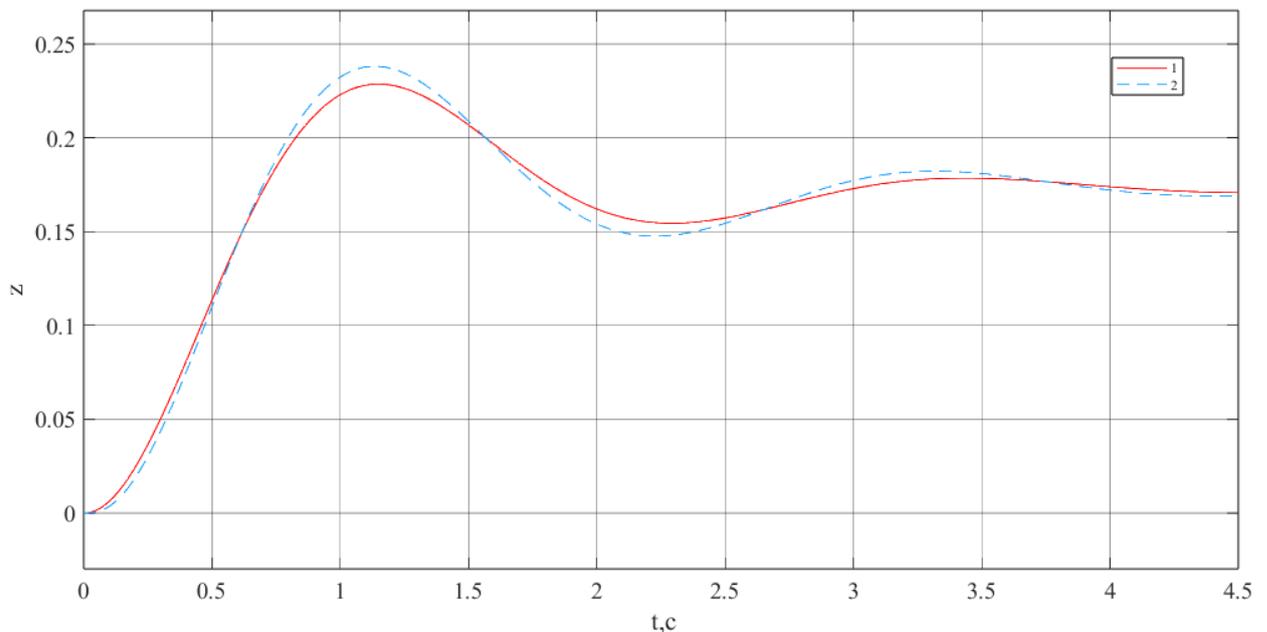


Рисунок 3.9 - График переходных процессов

где процесс 1 – желаемое программное движение, полученное в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], процесс 2 – переходной процесс, полученный в результате синтеза.

В результате решения поставленной задачи синтеза модифицированным обобщенным методом Галеркина были получены следующие значения варьируемых параметров регулятора: $T_1 = 0,0039$ с, $K_1 = 0,0306$; $K_2 = 0,105$. Полученный график переходного процесса показывает, что найденные параметры

приближенно обеспечивают заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме [91-92, 104, 111].

3.4 Пример решения задачи синтеза параметров нелинейных импульсных систем с распределенными параметрами

Рассмотрим синтез управления объектом с распределенными параметрами на примере процесса деформации пластины в составе нелинейной импульсной системы автоматического управления.

С целью упрощения и возможностью распространения модифицированного обобщенного метода Галеркина на системы с распределенными параметрами, рассмотрим классический пример перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [95-101].

Поскольку в данном примере рассмотрена нелинейная импульсная система, необходимо и достаточно использовать данные из [105], где рассмотрено управление процессом деформации пластины. Используя исходные значения из источника [102], применим переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [78] и распространим полученное уравнение на обобщенный метод Галеркина.

Необходимо найти функцию, удовлетворяющую в двумерной области:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\} \quad (3.88)$$

следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\pi - x)xy, \quad (3.89)$$

или

$$\begin{aligned}
& K_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \\
& + K_4(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + K_5(x, y) \cdot u = f(x, y),
\end{aligned} \tag{3.90}$$

с граничными условиями $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 10$ или $U(x, y) = U(a, y) = U(x, 0) = U(x, b) = d$.

При $a=b=\pi$, $c=-1$, $d=10$ и $n=5$, зададим непрерывные функции уравнения $K_1(x, y)$, ($K_1 > 0$), $K_2(x, y)$, ($K_2 > 0$), $K_3(x, y)$, $K_4(x, y)$, $K_5(x, y)$ и числовые значения: $K_1(x, y) = 1,5$; $K_2(x, y) = 1$; $K_3(x, y) = 0,5$; $K_4(x, y) = 0,2$; $K_5(x, y) = 0$; $a = \pi$; $b = \pi$; $c = -1$; $d = 10$;

$$f(x, y) = c \cdot (a - x) \cdot x \cdot y. \tag{3.91}$$

Получим точное решение $U(x, y)$, с помощью разложения функции в двойной ряд Фурье, используя метод разделения переменных [103]:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= Q(x, y) + f(y) + \psi(y), \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - (\pi - x)xy, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= K^2 \frac{\partial Q}{\partial y} + f'(y) + \psi'(y),
\end{aligned} \tag{3.92}$$

то есть изменим уравнение, сделаем его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K^2 \frac{\partial Q}{\partial x^2} - f'(y) - \psi'(y), \tag{3.93}$$

при чем $Q(a, y) = 0$, $f(b, y) = 0$, тогда

$$\begin{aligned}
U(0, y) &= 0 + 0 + \psi(y) = \alpha(y), \\
U(b, y) &= 0 + f(y)b + \psi(y) = \beta(y)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$f(y) = \frac{\beta(y) - \alpha(y)}{b}. \tag{3.95}$$

Таким образом однородное уравнение представляем в виде неоднородного, при этом у Q изменяем граничные условия:

$$\begin{aligned}
U(x, 0) &= f_0(x) = Q(x, 0) + f(0)x + \psi(0) = \\
&= Q(x, 0) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x + \alpha(0),
\end{aligned} \tag{3.96}$$

то есть начальные условия для функции Q :

$$Q(x, 0) = f_0(x) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b} x - \alpha(0), \quad (3.97)$$

$$Q(a, y) = 0, \quad Q(b, y) = 0.$$

Далее разделим правую часть уравнения и граничные условия по разным функциям, то есть оба уравнения будут являться решением одного и того же уравнения:

$$Q(x, y) = U(x, y) + V(x, y). \quad (3.98)$$

Получим однородное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.99)$$

и неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(y)x - \psi'(y). \quad (3.100)$$

После подстановки (3.95) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b} x - \alpha'(y), \quad (3.101)$$

при этом

$$U(x, 0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b} x + \alpha(0), \quad V(x, 0) = 0. \quad (3.102)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial(U + V)}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b} x - \alpha'(y) = \\ &= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b} x - \alpha'(y), \end{aligned} \quad (3.103)$$

при этом

$$Q(x, 0) = U(x, 0) + V(x, 0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b} x - \alpha(0), \quad (3.104)$$

с учетом нулевых граничных условий:

$$U(a, y) = 0, \quad U(b, y) = 0, \quad V(a, y) = 0, \quad V(b, y) = 0.$$

Из начальных условий: $U(a, y) = H(0)V(y) = 0$, $U(b, y) = H(l)V(y) = 0$, $V(t)$ не может быть равно 0, тогда U всегда будет равно 0. Получим $H(a) = 0$, $H(b) = 0$.

Далее разделяем функцию на две части:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= H(x)B(y), \\ \frac{B'(y)}{K^2 B(y)} &= \frac{H''(x)}{H(x)} = M, \\ H''(x) - MH(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то

$$H_{km}(x) = \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ky}{b}\right), \quad (3.106)$$

где $M = -\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, поскольку $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b}$, при чем $k \in \mathbb{N}$.

Соответственно

$$U(x, y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{km} \sin\left(\frac{k \cdot \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \cdot \pi y}{b}\right). \quad (3.107)$$

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=6$ точность составляет 0,001; для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=27$.

Найдем коэффициент H_{km} при $i = 1 \dots M$, $j = 1 \dots M$:

$$H_{i-1, j-1} = \frac{-4}{\pi^2 \cdot (i^2 + j^2)} \cdot \left(\int_0^a \int_0^b f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot j \cdot y}{b}\right) dy dx \right). \quad (3.108)$$

Таким образом получим точное решение:

$$U(x, y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{k-1, m-1} \sin\left(\frac{k \cdot \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \cdot \pi y}{b}\right). \quad (3.109)$$

и матрицу точного решения U_I в области D при $i = 1 \dots 10$, $j = 1 \dots 10$,

$$U_{1i, j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right), \quad (3.110)$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 9,911 & 9,823 & 9,738 & 9,665 & 9,617 & 9,606 & 9,643 & 9,727 & 9,852 & 10 \\ 10 & 9,823 & 9,643 & 9,467 & 9,312 & 9,205 & 9,175 & 9,246 & 9,422 & 9,686 & 10 \\ 10 & 9,738 & 9,467 & 9,193 & 8,943 & 8,762 & 8,703 & 8,804 & 9,078 & 9,497 & 10 \\ 10 & 9,665 & 9,312 & 8,943 & 8,595 & 8,333 & 8,234 & 8,359 & 8,728 & 9,404 & 10 \\ 10 & 9,617 & 9,205 & 8,762 & 8,333 & 0 & 7,863 & 8,002 & 8,444 & 9,147 & 10 \\ 10 & 9,606 & 9,175 & 8,703 & 8,234 & 7,863 & 7,701 & 7,839 & 8,312 & 9,073 & 10 \\ 10 & 9,643 & 9,246 & 8,804 & 8,359 & 8,002 & 7,839 & 7,962 & 8,405 & 9,122 & 10 \\ 10 & 9,727 & 9,424 & 9,078 & 8,728 & 8,144 & 8,312 & 8,405 & 8,749 & 9,311 & 10 \\ 10 & 9,852 & 9,686 & 9,497 & 9,304 & 9,147 & 9,073 & 9,122 & 9,311 & 9,621 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы видно, что решение $\min(U_1)=7,701$, а $\max(U_1)=10$.

Далее необходимо получить приближенное решение. Для получения приближенного решения введем $n_1 = \sqrt{n} = 3$, которая представляет собой количество решений:

$$U_n = V(0,0,x,y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} C_{k,m} V(k,m,x,y). \quad (3.111)$$

Приближенные функции вида:

$$V_1(k,m,x,y) = x^k \cdot (a-x) \cdot y^m \cdot (b-y), \quad (3.112)$$

после нормирования в интервале ($i=1..n_1, j=1..n_1$):

$$VV_{i-1,j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i,j,x,y))^2 dx dy}, \quad (3.113)$$

Получаем нормированные приближенные функции вида:

$$V(k,m,x,y) = if \left(k+m \neq 0, \frac{V_1(x,m,x,y)}{VV_{k-1,m-1}}, d \right). \quad (3.114)$$

Для получения проверочных функций, возьмем приближенные функции:

$$W(k,m,x,y) = V(k,m,x,y). \quad (3.115)$$

Зададим оператор, соответствующий левой части уравнения:

$$L_1(k, m, x, y, V) = K_1(x, y) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(k, m, x, y) + K_2(x, y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} V(k, m, x, y) + K_3(x, y) \cdot \frac{d}{dx} V(k, m, x, y), \quad (3.116)$$

$$L(k, m, x, y, V) = L_1(k, m, x, y, V) + K_4(x, y) \cdot \frac{d}{dy} V(k, m, x, y) + K_5(x, y) \cdot V(k, m, x, y).$$

и найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для нахождения коэффициентов приближенных решений C_k при $i_1 = 1..n_1, j_1 = 1..n_1, i_2 = 1..n_1, j_2 = 1..n_1$:

$$B_{i_1-1+n_1(j_1-1)} = \int_0^a \int_0^b (f(x, y) - L(0, 0, x, y, V)) \cdot W(i, j, x, y) dx dy, \quad (3.117)$$

$$A_{i_1-1+n_1(j_1-1), i_2-1+n_1(j_2-1)} = \int_0^a \int_0^b L(i_2, j_2, x, y, V) \cdot W(i, j, x, y) dx dy. \quad (3.118)$$

Для дальнейшего получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами, введем в рассмотрение матрицы $AC=B$, элементы которой являются коэффициентами системы дифференциального уравнения:

$$C = A^{-1} \cdot B, \quad (3.119)$$

которые при $n_1=3$ равны:

$$A = \begin{bmatrix} -2,533 & -2,221 & -1,93 & -2,31 & -2,021 & -1,756 & -2,047 & -1,792 & -1,556 \\ -2,518 & -3,141 & -3,33 & -2,3 & -2,879 & -3,057 & -2,038 & -2,551 & -2,709 \\ -2,391 & -3,577 & -4,296 & -2,187 & -3,288 & -3,959 & -1,938 & -2,913 & -3,507 \\ -2,429 & -2,133 & -1,855 & -2,938 & -2,6 & -2,265 & -3,07 & -2,728 & -2,38 \\ -2,411 & -2,998 & -3,173 & -2,897 & -3,546 & -3,722 & -3,016 & -3,659 & -3,822 \\ -2,286 & -3,403 & -4,078 & -2,727 & -3,969 & -4,701 & -2,827 & -4,061 & -4,777 \\ -2,232 & -1,964 & -1,709 & -3,169 & -2,82 & -2,462 & -3,708 & -3,32 & -2,903 \\ -2,211 & -2,735 & -2,887 & -3,108 & -3,758 & -3,918 & -3,618 & -4,316 & -4,468 \\ -2,091 & -3,092 & -3,692 & -2,908 & -4,157 & -4,876 & -3,364 & -4,715 & -5,471 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -6,722 \\ -9,112 \\ -8,523 \\ -7,545 \\ -9,411 \\ -8,803 \\ -7,793 \end{bmatrix},$$

$$C = (2,16 \quad 0,407 \quad -0,488 \quad 0,291 \quad 0,15 \quad -0,25 \quad 0,976 \quad 0,153 \quad -0,08).$$

Следовательно приближенное решение $U(x, y)$ при $n_1=3$ выглядит следующим образом:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (3.120)$$

Запишем матрицу получившегося точного решения, разбивая область D на сто частей ($i = 0..10, j = 0..10$):

$$U_{2,i,j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (3.121)$$

Матрица приближенного решения имеет вид:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,179 & 10,338 & 10,48 & 10,602 & 10,696 & 10,746 & 10,731 & 10,625 & 10,394 & 10 \\ 10 & 10,322 & 10,61 & 10,867 & 11,088 & 11,259 & 11,35 & 11,324 & 11,132 & 10,714 & 10 \\ 10 & 10,424 & 10,801 & 11,14 & 11,432 & 11,657 & 11,778 & 11,746 & 11,494 & 10,943 & 10 \\ 10 & 10,479 & 10,905 & 11,287 & 11,618 & 11,874 & 12,013 & 11,978 & 11,695 & 11,071 & 10 \\ 10 & 10,487 & 10,918 & 11,306 & 11,642 & 11,904 & 12,048 & 12,016 & 11,73 & 11,096 & 10 \\ 10 & 10,449 & 10,845 & 11,202 & 11,513 & 11,756 & 11,893 & 11,867 & 11,606 & 11,019 & 10 \\ 10 & 10,371 & 10,697 & 10,99 & 11,248 & 11,451 & 11,568 & 11,551 & 11,338 & 10,852 & 10 \\ 10 & 10,262 & 10,49 & 10,696 & 10,877 & 11,023 & 11,109 & 11,101 & 10,954 & 10,609 & 10 \\ 10 & 10,133 & 10,248 & 10,352 & 10,444 & 10,519 & 10,566 & 10,565 & 10,492 & 10,316 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения точного и приближенного решений найдем разность получившихся матриц:

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,267 & -0,515 & -0,742 & -0,937 & -1,079 & -1,14 & -1,089 & -0,898 & -0,542 & 0 \\ 0 & -0,5 & -0,966 & -1,399 & -1,776 & -2,054 & -2,174 & -2,078 & -1,71 & -1,028 & 0 \\ 0 & -0,686 & -1,334 & -1,946 & -2,489 & -2,895 & -3,076 & -2,942 & -2,416 & -1,446 & 0 \\ 0 & -0,814 & -1,593 & -2,344 & -3,023 & -3,541 & -3,779 & -3,619 & -2,967 & -1,767 & 0 \\ 0 & -0,87 & -1,713 & -2,543 & -3,309 & -3,904 & -4,186 & -4,015 & -3,286 & -1,949 & 0 \\ 0 & -0,842 & -1,67 & -2,499 & -3,278 & -3,893 & -4,192 & -4,028 & -3,294 & -1,946 & 0 \\ 0 & -0,729 & -1,451 & -2,186 & -2,888 & -3,449 & -3,729 & -3,589 & -2,933 & -1,729 & 0 \\ 0 & -0,535 & -1,068 & -1,618 & -2,149 & -2,579 & -2,797 & -2,697 & -2,205 & -1,298 & 0 \\ 0 & -0,281 & -0,562 & -0,854 & -1,14 & -1,373 & -1,493 & -1,442 & -1,181 & -0,695 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{11} = 4,192$.

Для сравнения, найдем предыдущее приближенное решение при $i=1 \dots n_1-1$, $j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (3.117) при $i_1=1 \dots n_1-1$, $j_1=1 \dots n_1-1$, $i_2=1 \dots n_1-1$, $j_2=1 \dots n_1-1$, и, используя формулу (3.118), и, решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_{1k} :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,533 & -2,221 & -2,31 & -2,021 \\ -2,518 & -3,141 & -2,3 & -2,879 \\ -2,429 & -2,133 & -2,938 & -2,6 \\ -2,411 & -2,998 & -2,897 & -3,546 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1,829 \quad -0,349 \quad 2,004 \quad -0,182].$$

Получим матрицу предыдущего (для $n_1=2$) приближенного решения, разбив область D на 100 частей:

$$UP(x, y) = if \left[n_1 \neq 1, V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{m=1}^{n_1-1} c_{1, k-1+(n_1-1)(m-1)} \cdot V(k, m, x, y), V(0, 0, x, y) \right], \quad (3.122)$$

$$i = 0 \dots 10, j = 0 \dots 10,$$

$$U_{3i,j} = UP\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (3.123)$$

Построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$ при U_3 :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,165 & 10,344 & 10,518 & 10,668 & 10,775 & 10,82 & 10,784 & 10,648 & 10,393 & 10 \\ 10 & 10,283 & 10,592 & 10,893 & 11,154 & 11,34 & 11,419 & 11,358 & 11,123 & 10,682 & 10 \\ 10 & 10,359 & 10,752 & 11,137 & 11,471 & 11,71 & 11,813 & 11,736 & 11,437 & 10,873 & 10 \\ 10 & 10,395 & 10,831 & 11,259 & 11,631 & 11,899 & 12,015 & 11,931 & 11,6 & 10,972 & 10 \\ 10 & 10,396 & 10,836 & 11,269 & 11,647 & 11,92 & 12,04 & 11,957 & 11,622 & 10,986 & 10 \\ 10 & 10,366 & 10,774 & 11,178 & 11,531 & 11,788 & 11,901 & 11,826 & 11,514 & 10,921 & 10 \\ 10 & 10,307 & 10,652 & 10,995 & 11,296 & 11,515 & 11,614 & 11,551 & 11,288 & 10,784 & 10 \\ 10 & 10,224 & 10,478 & 10,731 & 10,954 & 11,118 & 11,192 & 11,147 & 10,953 & 10,58 & 10 \\ 10 & 10,121 & 10,258 & 10,396 & 10,518 & 10,608 & 10,649 & 10,625 & 10,52 & 10,317 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,014 & -6,3 \cdot 10^{-3} & -0,038 & -0,066 & -0,079 & -0,074 & -0,052 & -0,023 & 1,466 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0,039 & 0,017 & -0,027 & -0,065 & -0,082 & -0,07 & -0,034 & 8,641 \cdot 10^{-3} & 0,033 & 0 \\ 0 & 0,065 & 0,049 & 2,725 \cdot 10^{-3} & -0,039 & -0,053 & -0,035 & 9,242 \cdot 10^{-3} & 0,057 & 0,071 & 0 \\ 0 & 0,084 & 0,074 & 0,028 & -0,013 & -0,025 & -2,248 \cdot 10^{-3} & 0,047 & 0,095 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,09 & 0,082 & 0,037 & -4,44 \cdot 10^{-3} & -0,016 & 8,518 \cdot 10^{-3} & 0,059 & 0,108 & 0,11 & 0 \\ 0 & 0,083 & 0,072 & 0,024 & -0,018 & -0,032 & -8,567 \cdot 10^{-3} & 0,041 & 0,091 & 0,098 & 0 \\ 0 & 0,064 & 0,045 & -4,435 \cdot 10^{-3} & -0,048 & -0,065 & -0,046 & -1,895 \cdot 10^{-4} & 0,05 & 0,068 & 0 \\ 0 & 0,038 & 0,013 & -0,035 & -0,077 & -0,094 & -0,082 & -0,045 & 1,112 \cdot 10^{-3} & 0,029 & 0 \\ 0 & 0,013 & -9,717 \cdot 10^{-3} & -0,044 & -0,074 & -0,088 & -0,083 & -0,06 & -0,028 & -1,223 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{21} = 0,11$.

Получим невязку найденного приближенного решения:

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} \left[c_{k-1+n_1 \cdot (m-1)} \cdot L(k, m, x, y, V) + L(0, 0, x, y, V) - f(x, y) \right]. \quad (3.124)$$

Найдем матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей:

$$U_{4i,j} = R\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right), \quad (3.125)$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,064 & -0,109 & -0,142 & -0,169 & -0,191 & -0,204 & -0,203 & -0,178 & -0,116 & 0 \\ -0,164 & 2,15 & 4,44 & 6,699 & 8,93 & 11,1 & 13,33 & 15,554 & 17,826 & 20,19 & 22,695 \\ -0,295 & 3,9 & 7,96 & 11,99 & 16 & 19,9 & 23,79 & 27,723 & 31,733 & 35,886 & 40,26 \\ -0,395 & 5,1 & 10,5 & 15,74 & 21 & 26,1 & 31,2 & 36,364 & 41,616 & 47,056 & 52,786 \\ -0,464 & 5,8 & 11,9 & 17,98 & 24 & 29,8 & 35,644 & 41,525 & 47,527 & 53,754 & 60,331 \\ -0,5 & 6 & 12,42 & 18,72 & 24,9 & 31,02 & 37,106 & 43,232 & 49,494 & 56,01 & 62,918 \\ -0,499 & 5,7 & 11,91 & 17,96 & 23,9 & 29,8 & 35,615 & 41,497 & 47,525 & 53,822 & 60,54 \\ -0,457 & 5 & 10,41 & 15,72 & 20,9 & 26,1 & 31,169 & 36,315 & 41,605 & 47,166 & 53,152 \\ -0,366 & 3,8 & 7,9 & 11,9 & 15,9 & 19,9 & 23,758 & 27,663 & 31,698 & 35,986 & 40,678 \\ -0,217 & 2,1 & 4,5 & 6,8 & 9,1 & 11,3 & 13,355 & 15,501 & 17,745 & 20,201 & 23,009 \\ 0 & -0,002 & 0,061 & 0,12 & 0,12 & 0,052 & -0,077 & -0,228 & -0,333 & -0,298 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{31} = 62,918$.

Введем приближенную функцию, в качестве которой будет функция $V_1(k, m, x, y)$, а в качестве проверочной функции возьмем многочлены Лежандра [78]:

$$V_1(k, m, x, y) = x^k \cdot (a - x) \cdot y^m \cdot (b - y). \quad (3.126)$$

Вычислим нормировочные коэффициенты при $i = 1 \dots n_1, j = 1 \dots n_1$:

$$VV_{i-1, j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i, j, x, y))^2 dx dy}. \quad (3.127)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, m, x, y) = \left(k + m \neq 0, \frac{V_1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right). \quad (3.128)$$

Введем проверочные функции:

$$P(k, t) = \left(k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right), \quad (3.129)$$

где $k = 1 \dots n_1, m = 1 \dots n_1$ и

$$W(k, m, x, y) = \frac{P\left(k-1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)}{\sqrt{\int_0^a \left(P\left(k-1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)\right)^2 dx}} \times \frac{P\left(m-1, \frac{2}{b} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)\right)}{\sqrt{\int_0^b \left(P\left(m-1, \frac{2}{b} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)\right)\right)^2 dy}}. \quad (3.130)$$

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (3.117) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (3.118) и решая систему уравнений $A \cdot C = B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A = \begin{bmatrix} -2,533 & -2,369 & -3,083 & -2,369 & -2,216 & -2,884 & -2,79 & -2,61 & -3,192 \\ -0,459 & -3,22 & -4,723 & -0,43 & -3,012 & -4,418 & -0,399 & -2,99 & -4,401 \\ 0,453 & 0,091 & -2,204 & 0,424 & 0,085 & -2,062 & 0,657 & 0,325 & -1,753 \\ -0,184 & -0,172 & -0,16 & -2,306 & -2,157 & -2,29 & -3,466 & -3,242 & -3,456 \\ 2 \times 10^{-14} & -0,06 & -0,092 & -0,149 & -1,525 & -2,276 & -0,231 & -2,328 & -3,472 \\ 0,082 & 0,077 & 0,051 & 0,811 & 0,651 & -0,302 & 1,209 & 0,964 & -0,497 \\ 0,68 & 0,636 & 0,985 & 0,503 & 0,47 & 0,806 & -1,097 & -1,027 & -0,71 \\ 0,205 & 1,293 & 1,885 & 0,192 & 1,167 & 1,696 & 0,128 & 0,311 & 0,408 \\ 10^{-12} & 0,149 & 1,112 & 0,06 & 0,195 & 1,077 & 0,68 & 0,728 & 1,112 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8,117 \\ 0 \\ 3,63 \\ -4,687 \\ 0 \\ 2,096 \\ -6,972 \cdot 10^{-12} \\ 0 \\ 3,118 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix},$$

$$C^T = [2,056 \quad 0,402 \quad -0,471 \quad 0,353 \quad 0,187 \quad -0,287 \quad 1,009 \quad 0,171 \quad -0,085].$$

Следовательно, приближенное решение $U(x, y)$ для $n_1=3$ равно:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (3.131)$$

Построим матрицу решений U_2 , разбив область D на 100 частей ($i = 0 \dots 10, j = 0 \dots 10$):

$$U_{2i,j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (3.132)$$

Для сравнения точного и приближенного решений найдем разность получившихся матриц при U_2 :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,172 & 10,327 & 10,469 & 10,595 & 10,693 & 10,748 & 10,738 & 10,634 & 10,402 & 10 \\ 10 & 10,31 & 10,592 & 10,849 & 11,076 & 11,255 & 11,356 & 11,338 & 11,15 & 10,729 & 10 \\ 10 & 10,408 & 10,779 & 11,118 & 11,418 & 11,655 & 11,789 & 11,767 & 11,52 & 10,964 & 10 \\ 10 & 10,461 & 10,88 & 11,264 & 11,604 & 11,873 & 12,027 & 12,005 & 11,727 & 11,097 & 10 \\ 10 & 10,469 & 10,893 & 11,283 & 11,629 & 11,905 & 12,065 & 12,046 & 11,765 & 11,123 & 10 \\ 10 & 10,432 & 10,822 & 11,18 & 11,5 & 11,757 & 11,909 & 11,895 & 11,639 & 11,045 & 10 \\ 10 & 10,357 & 10,678 & 10,973 & 11,237 & 11,452 & 11,581 & 11,575 & 11,367 & 10,874 & 10 \\ 10 & 10,252 & 10,476 & 10,683 & 10,869 & 11,023 & 11,118 & 11,118 & 10,974 & 10,626 & 10 \\ 10 & 10,128 & 10,241 & 10,344 & 10,439 & 10,519 & 10,57 & 10,573 & 10,502 & 10,324 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,26 & -0,505 & -0,732 & -0,929 & -1,076 & -1,142 & -1,095 & -0,907 & -0,549 & 0 \\ 0 & -0,488 & -0,949 & -1,382 & -1,764 & -2,05 & -2,18 & -2,092 & -1,728 & -1,043 & 0 \\ 0 & -0,67 & -1,311 & -1,925 & -2,475 & -2,892 & -3,086 & -2,963 & -2,443 & -1,467 & 0 \\ 0 & -0,796 & -1,568 & -2,32 & -3,009 & -3,54 & -3,793 & -3,646 & -2,999 & -1,793 & 0 \\ 0 & -0,852 & -1,688 & -2,52 & -3,296 & -3,905 & -4,202 & -4,044 & -3,321 & -1,976 & 0 \\ 0 & -0,826 & -1,647 & -2,478 & -3,266 & -3,894 & -4,208 & -4,056 & -3,327 & -1,973 & 0 \\ 0 & -0,715 & -1,432 & -2,168 & -2,878 & -3,45 & -3,742 & -3,613 & -2,962 & -1,752 & 0 \\ 0 & -0,525 & -1,054 & -1,605 & -2,141 & -2,579 & -2,806 & -2,714 & -2,226 & -1,315 & 0 \\ 0 & -0,276 & -0,555 & -0,847 & -1,135 & -1,372 & -1,497 & -1,451 & -1,191 & -0,704 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{12} = 4,208$.

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (3.117) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$, и, используя формулу (3.118), и, решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,533 & -2,221 & -2,31 & -2,021 \\ -2,518 & -3,141 & -2,3 & -2,879 \\ -2,429 & -2,133 & -2,938 & -2,6 \\ -2,411 & -2,998 & -2,897 & -3,546 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8,117 \\ 0 \\ -4,687 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1^T = [29,134 \quad -24,549 \quad -19,853 \quad 17,162].$$

Получим матрицу предыдущего (для $n_1=2$) приближенного решения, разбив область D на 100 частей.

Используя формулу (3.122) и (3.123). Построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$ при U_3 :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 11,657 & 12,518 & 12,743 & 12,493 & 11,928 & 11,209 & 10,496 & 9,95 & 9,731 & 10 \\ 10 & 12,398 & 13,648 & 13,982 & 13,629 & 12,821 & 11,786 & 10,757 & 9,962 & 9,633 & 10 \\ 10 & 12,426 & 13,7 & 14,051 & 13,709 & 12,905 & 11,869 & 10,83 & 10,019 & 9,665 & 10 \\ 10 & 11,949 & 12,985 & 13,286 & 13,035 & 12,41 & 11,592 & 10,762 & 10,099 & 9,785 & 10 \\ 10 & 11,173 & 11,814 & 12,024 & 11,906 & 11,561 & 11,092 & 10,599 & 10,185 & 9,951 & 10 \\ 10 & 10,303 & 10,498 & 10,6 & 10,625 & 10,588 & 10,504 & 10,388 & 10,255 & 10,121 & 10 \\ 10 & 9,544 & 9,347 & 9,35 & 9,493 & 9,718 & 9,965 & 10,176 & 10,292 & 10,253 & 10 \\ 10 & 9,104 & 8,674 & 8,609 & 8,811 & 9,178 & 9,611 & 10,01 & 10,274 & 10,304 & 10 \\ 10 & 9,187 & 8,788 & 8,714 & 8,879 & 9,196 & 9,577 & 9,935 & 10,183 & 10,234 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,486 & -2,191 & -2,274 & -1,899 & -1,235 & -0,461 & 0,242 & 0,684 & 0,671 & 0 \\ 0 & -2,087 & -3,056 & -3,132 & -2,553 & -1,566 & -0,431 & 0,581 & 1,188 & 1,096 & 0 \\ 0 & -2,018 & -2,921 & -2,933 & -2,291 & -1,25 & -0,08 & 0,937 & 1,502 & 1,299 & 0 \\ 0 & -1,488 & -2,105 & -2,023 & -1,431 & -0,537 & 0,436 & 1,244 & 1,628 & 1,312 & 0 \\ 0 & -0,704 & -0,921 & -0,742 & -0,277 & 0,343 & 0,973 & 1,447 & 1,581 & 1,172 & 0 \\ 0 & 0,13 & 0,325 & 0,58 & 0,875 & 1,169 & 1,405 & 1,507 & 1,384 & 0,925 & 0 \\ 0 & 0,813 & 1,331 & 1,623 & 1,744 & 1,734 & 1,616 & 1,399 & 1,075 & 0,621 & 0 \\ 0 & 1,148 & 1,803 & 2,074 & 2,059 & 1,845 & 1,508 & 1,109 & 0,7 & 0,321 & 0 \\ 0 & 0,941 & 1,453 & 1,63 & 1,56 & 1,323 & 0,993 & 0,638 & 0,319 & 0,09 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{22} = 3,132$.

Найдем невязку полученного приближенного решения, используя формулу (3.124). Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей, используя формулу (3.125):

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,052 & -0,083 & -0,102 & -0,116 & -0,127 & -0,134 & -0,133 & -0,118 & -0,079 & 0 \\ -0,129 & 2,201 & 4,501 & 6,764 & 8,989 & 11,186 & 13,372 & 15,57 & 17,813 & 20,143 & 22,608 \\ -0,232 & 3,943 & 8,047 & 12,072 & 16,025 & 19,923 & 23,796 & 27,688 & 31,654 & 35,762 & 40,091 \\ -0,311 & 5,176 & 10,563 & 15,841 & 21,02 & 26,123 & 31,194 & 36,289 & 41,483 & 46,868 & 52,551 \\ -0,369 & 5,903 & 12,059 & 18,087 & 23,998 & 29,821 & 35,605 & 41,419 & 47,355 & 53,523 & 60,052 \\ -0,405 & 6,128 & 12,543 & 18,824 & 24,979 & 31,038 & 37,056 & 43,111 & 49,303 & 55,758 & 62,622 \\ -0,414 & 5,858 & 12,025 & 18,062 & 23,974 & 29,789 & 35,563 & 41,376 & 47,335 & 53,575 & 60,255 \\ -0,39 & 5,101 & 10,512 & 15,81 & 20,991 & 26,079 & 31,125 & 36,209 & 41,438 & 46,95 & 52,906 \\ -0,321 & 3,866 & 8,012 & 12,073 & 16,032 & 19,903 & 23,731 & 27,587 & 31,574 & 35,824 & 40,497 \\ -0,197 & 2,163 & 4,533 & 6,852 & 9,091 & 11,248 & 13,354 & 15,469 & 17,682 & 20,113 & 22,912 \\ 0 & 0,006 & 0,082 & 0,15 & 0,16 & 0,092 & -0,043 & -0,204 & -0,322 & -0,298 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{32} = 62,622$.

Введем приближенные функции, в качестве которой будет функция $V_1(k, m, x, y)$, а в качестве проверочных функций возьмем из [78]:

$$V_1(k, m, x, y) = \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right). \quad (3.133)$$

Нормируем их:

$$VV_{i-1, j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i, j, x, y))^2 dx dy}. \quad (3.134)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, m, x, y) = \left(k + m \neq 0, \frac{V_1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right). \quad (3.135)$$

Для примера в качестве проверочных функций возьмем приближенные:

$$W(k, m, x, y) = V(k, m, x, y). \quad (3.136)$$

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (3.117) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$, и, используя формулу (3.5), и, решая систему уравнений $A \cdot C = B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,27 & -0,516 & -0,727 & -0,907 & -1,051 & -1,13 & -1,088 & -0,876 & -0,493 & 0 \\ 0 & -0,514 & -0,986 & -1,397 & -1,751 & -2,037 & -2,192 & -2,11 & -1,699 & -0,955 & 0 \\ 0 & -0,71 & -1,368 & -1,954 & -2,469 & -2,888 & -3,116 & -3 & -2,414 & -1,356 & 0 \\ 0 & -0,839 & -1,629 & -2,349 & -2,997 & -3,528 & -3,819 & -3,68 & -2,959 & -1,661 & 0 \\ 0 & -0,892 & -1,743 & -2,539 & -3,27 & -3,878 & -4,212 & -4,063 & -3,267 & -1,833 & 0 \\ 0 & -0,86 & -1,693 & -2,489 & -3,234 & -3,86 & -4,208 & -4,066 & -3,27 & -1,835 & 0 \\ 0 & -0,744 & -1,472 & -2,18 & -2,853 & -3,424 & -3,745 & -3,624 & -2,917 & -1,637 & 0 \\ 0 & -0,549 & -1,09 & -1,623 & -2,135 & -2,573 & -2,822 & -2,735 & -2,202 & -1,236 & 0 \\ 0 & -0,292 & -0,581 & -0,867 & -1,144 & -1,382 & -1,519 & -1,474 & -1,187 & -0,666 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{13} = 4,312$.

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (3.117) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$, и, используя формулу (3.118), и, решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,5 & -0,424 & 0,17 & -1,306 \cdot 10^{-13} \\ -0,424 & -7 & -1,962 \cdot 10^{-14} & -0,17 \\ -0,17 & -2,321 \cdot 10^{-13} & -5,5 & -0,424 \\ 1,726 \cdot 10^{-13} & 0,17 & 0,424 & -10 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [3,209 \quad 0,195 \quad -0,626 \quad -0,023].$$

Получим матрицу предыдущего (для $n_1=2$) приближенного решения, разбив область D на 100 частей, используя формулу (3.122) и (3.123).

Построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10,14 & 10,289 & 10,444 & 10,592 & 10,704 & 10,747 & 10,695 & 10,54 & 10,295 & 10 \\ 10 & 10,262 & 10,539 & 10,831 & 11,108 & 11,319 & 11,401 & 11,304 & 11,012 & 10,554 & 10 \\ 10 & 10,349 & 10,721 & 11,113 & 11,487 & 11,771 & 11,882 & 11,753 & 11,361 & 10,745 & 10 \\ 10 & 10,395 & 10,816 & 11,262 & 11,689 & 12,016 & 12,146 & 12 & 11,554 & 10,851 & 10 \\ 10 & 10,397 & 10,822 & 11,274 & 11,709 & 12,043 & 12,178 & 12,032 & 11,58 & 10,866 & 10 \\ 10 & 10,36 & 10,747 & 11,161 & 11,561 & 11,87 & 11,996 & 11,865 & 11,452 & 10,796 & 10 \\ 10 & 10,293 & 10,609 & 10,948 & 11,278 & 11,535 & 11,641 & 11,535 & 11,196 & 10,656 & 10 \\ 10 & 10,205 & 10,427 & 10,666 & 10,9 & 11,083 & 11,159 & 11,086 & 10,846 & 10,464 & 10 \\ 10 & 10,105 & 10,219 & 10,343 & 10,464 & 10,558 & 10,598 & 10,561 & 10,437 & 10,24 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,041 & 0,05 & 0,021 & -0,02 & -0,036 & -0,011 & 0,035 & 0,064 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,075 & 0,09 & 0,033 & -0,045 & -0,077 & -0,033 & 0,053 & 0,11 & 0,088 & 0 \\ 0 & 0,098 & 0,114 & 0,035 & -0,074 & -0,121 & -0,064 & 0,051 & 0,13 & 0,108 & 0 \\ 0 & 0,109 & 0,125 & 0,03 & -0,098 & -0,155 & -0,093 & 0,039 & 0,133 & 0,115 & 0 \\ 0 & 0,112 & 0,126 & 0,028 & -0,105 & -0,165 & -0,103 & 0,033 & 0,131 & 0,114 & 0 \\ 0 & 0,107 & 0,122 & 0,031 & -0,093 & -0,148 & -0,088 & 0,039 & 0,13 & 0,112 & 0 \\ 0 & 0,093 & 0,11 & 0,036 & -0,066 & -0,11 & -0,056 & 0,052 & 0,126 & 0,103 & 0 \\ 0 & 0,071 & 0,085 & 0,034 & -0,037 & -0,066 & -0,025 & 0,054 & 0,105 & 0,083 & 0 \\ 0 & 0,039 & 0,047 & 0,021 & -0,015 & -0,029 & -0,065 & 0,035 & 0,061 & 0,047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{23} = 0,185$.

Найдем невязку полученного приближенного решения, используя формулу (3.124). Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей, используя формулу (3.125):

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0,119 & 2,227 & 4,544 & 7,086 & 9,622 & 11,885 & 13,839 & 15,78 & 18,159 & 21,243 & 24,885 \\ 0,22 & 3,695 & 7,588 & 11,935 & 16,299 & 20,176 & 23,523 & 26,946 & 31,338 & 37,207 & 44,222 \\ 0,292 & 4,787 & 9,84 & 15,502 & 21,193 & 26,246 & 30,609 & 35,097 & 40,901 & 48,696 & 58,033 \\ 0,33 & 5,505 & 11,31 & 17,801 & 24,321 & 30,115 & 35,123 & 40,264 & 46,881 & 55,737 & 66,33 \\ 0,333 & 5,795 & 11,902 & 18,707 & 25,535 & 31,605 & 36,852 & 42,214 & 49,069 & 58,205 & 69,111 \\ 0,305 & 5,597 & 11,504 & 18,073 & 24,655 & 30,501 & 35,546 & 40,685 & 47,239 & 55,962 & 66,368 \\ 0,253 & 4,885 & 10,06 & 15,816 & 21,579 & 26,687 & 31,086 & 35,571 & 41,308 & 48,959 & 58,095 \\ 0,181 & 3,671 & 7,579 & 11,937 & 16,301 & 20,166 & 23,498 & 26,916 & 31,324 & 37,227 & 44,284 \\ 0,094 & 1,969 & 4,087 & 6,469 & 8,862 & 10,985 & 12,831 & 14,768 & 17,323 & 20,781 & 24,923 \\ 0 & -0,232 & -0,43 & -0,587 & -0,723 & -0,854 & -0,956 & -0,963 & -0,806 & -0,464 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{33} = 69,111$.

Выпишем полученные значения решений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= 4,192, & \varepsilon_{21} &= 0,11, & \varepsilon_{31} &= 62,918, \\ \varepsilon_{12} &= 4,208, & \varepsilon_{22} &= 3,132, & \varepsilon_{32} &= 62,622, \\ \varepsilon_{13} &= 4,212, & \varepsilon_{23} &= 0,165, & \varepsilon_{33} &= 69,111.\end{aligned}$$

На основании полученных результатов следует вывод о том, что первая система ε_{11} , ε_{21} , ε_{31} приближенных и проверочных функций дает лучшее приближение решения дифференциального уравнения. Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении А, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [113].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A , B , C для получения передаточной функции звена с распределенными параметрами, аналогично п.п. 2.4. Зададим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -2,533 & -2,221 & -2,31 & -2,021 \\ -2,518 & -3,141 & -2,3 & -2,879 \\ -2,429 & -2,133 & -2,938 & -2,6 \\ -2,411 & -2,998 & -2,897 & -3,546 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix},$$

$$C = [1,829 \quad -0,349 \quad 2,004 \quad -0,182].$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$\begin{aligned}W(p) &= C(pI - A)^{-1}B = [1,849 \quad 2,132 \cdot 10^{-14} \quad 2,306 \quad 0] \times \\ &\times \left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2,533 & -2,221 & -2,31 & -2,021 \\ -2,518 & -3,141 & -2,3 & -2,879 \\ -2,429 & -2,133 & -2,938 & -2,6 \\ -2,411 & -2,998 & -2,897 & -3,546 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix} = \\ &= [1,829 \quad -0,349 \quad 2,004 \quad -0,182] \times \\ &\times \begin{bmatrix} p+2,533 & 2,221 & 2,31 & 2,021 \\ 2,518 & p+3,141 & 2,3 & 2,879 \\ 2,429 & 2,133 & p+2,938 & 2,6 \\ 2,411 & 2,998 & 2,897 & p+3,546 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix} = \\ &= [1,829 \quad -0,349 \quad 2,004 \quad -0,182] \times \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1,8290p^3 + 17,5584p^2 + 17,7413p + 3,6580}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{4,0238p^2 - 6,2186p - 2,264}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{-4,2067p^2 - 8,2305p - 3,1093}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{-3,6580p^2 + 2,0119p + 2,5606}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} \\ \frac{0,8725p^2 + 1,3262p + 0,5933}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{-0,3490p^3 - 3,1410p^2 - 3,0712p - 0,6282}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{0,8027p^2 - 0,5933p - 0,5235}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{1,0121p^2 + 1,6403p + 0,5584}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} \\ \frac{-4,8096p^2 - 9,2184p - 3,6072}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{-4,2084p^2 + 4,4088p + 3,0060}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{2,0040p^3 + 18,4368p^2 + 18,0360p + 3,8076}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{-5,2104p^2 - 7,4148p - 3,0060}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} \\ \frac{0,4368p^2 + 1,2740p - 0,2730}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{0,5278p^2 + 0,8918p + 0,2912}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{0,5460p^2 + 0,7280p + 0,2912}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} & \frac{-0,1820p^3 - 1,5652p^2 - 1,5470p - 0,3094}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -8,117 \\ -7,593 \\ -9,112 \\ -8,523 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{pn}(p) = \frac{28,9052p^3 + 93,4151p^2 + 105,3176p + 3,6301}{p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3}.$$

Обратимся к задаче синтеза технических систем с помощью модифицированного обобщенного метода Галеркина, который предполагает хорошо известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается и определяется исходя из заданных показателей качества работы системы переходном режиме ($T_{п.п.}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должны обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

Используя схему из [93], объектом управления будем считать пластину. На рисунке 3.10 представлена схема, моделирующая нелинейную импульсную систему автоматического управления процессом изгиба пластины.

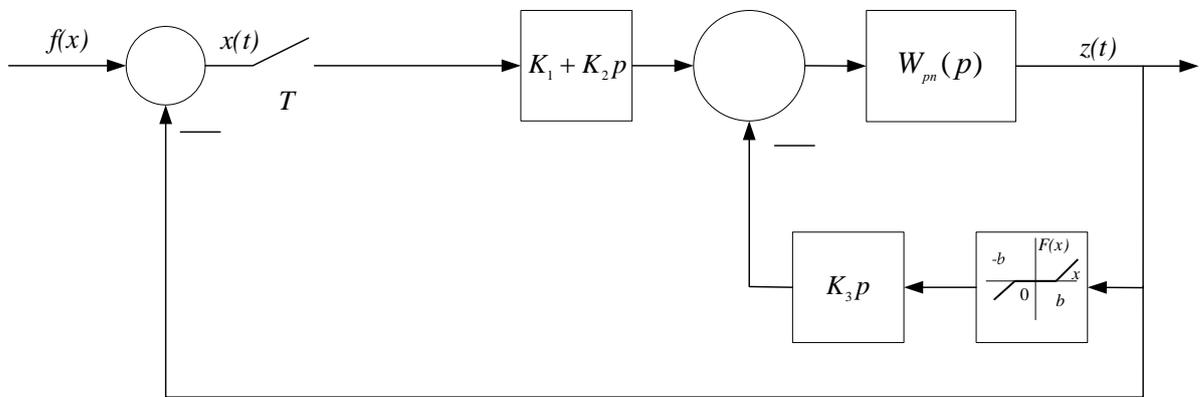


Рисунок 3.10 – Структурная схема нелинейной импульсной САУ процессом изгиба пластины

В схеме использован нелинейный элемент $F[x(t)]$ типа «зона нечувствительности», который с параметрами $b=0,4$ и $K=1$.

Динамика системы описывается следующим уравнением движения:

$$\begin{aligned}
& Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) + Q^*(c_k, D)x^*(t) + \bar{f}^*(c_k, D)x^*(t) + \\
& + R(c_k, D)y(t) + \bar{f}(c_k, D)y(t) + R^*(c_k, D)\bar{f}^*(c_k, D)y^*(t) = \\
& = f(t)\left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)\right) + f^*(t)\left(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D)\right), \\
& y(t) = F[x(t), \dot{x}(t)], \quad y^*(t) = F[x^*(t), \dot{x}^*(t)],
\end{aligned} \tag{3.139}$$

где $x(t), x^*(t)$ – координата входа и выходе модулятора; $f(t) = 1(t)$ – внешнее воздействие на входе; c_k – варьируемые параметры, $\bar{f}(p) = \frac{\gamma(p)}{\rho(p)}$ – обобщенные

полиномы САУ с распределенными параметрами [89],

$Q(c_k, D), R(c_k, D), S(c_k, D), R^*(c_k, D), Q^*(c_k, D), S^*(c_k, D), \bar{f}(c_k, D), \bar{f}^*(c_k, D)$ – полиномы оператора обобщенного дифференцирования D .

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = \left[x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \right] 1(t), \tag{3.140}$$

где $x_y = 0,8; H_1 = 0,82; \alpha = 3; \beta = 15 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,7 \text{ рад}$.

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\begin{aligned}
\Psi(c_k, t) = & Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) + Q^*(c_k, D)x^{0*}(t) + \\
& + \bar{f}^*(c_k, D)x^{0*}(t) + R(c_k, D)y(t) + \bar{f}(c_k, D)y(t) + \\
& + R^*(c_k, D)\bar{f}^*(c_k, D)y^*(t) - f(t)\left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)\right) - \\
& - f^*(t)\left(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D)\right).
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Таким образом в вычислительном плане задача сводится к системе уравнений вида:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\Phi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t)\Phi_q(t)dt + \\
& + \int_0^{\infty} Q^*(c_k, D)x^{0*}(t)\Phi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}^*(c_k, D)x^{0*}(t)\Phi_q(t)dt + \\
& + \int_0^{\infty} R(c_k, D)F[x^0(t), D\{x^0(t)\}]\Phi_q(t)dt + \\
& + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)F[x^0(t), D\{x^0(t)\}]\Phi_q(t)dt + \\
& + \int_0^{\infty} R^*(c_k, D)\bar{f}^*(c_k, D)F[x^{0*}(t), D\{x^{0*}(t)\}]\Phi_q(t)dt - \\
& - \int_0^{\infty} f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D))\Phi_q(t)dt - \\
& - \int_0^{\infty} f^*(t)(S^*(c_k, D) + \bar{f}^*(c_k, D))\Phi_q(t)dt = 0, \\
& k, q = 1, 2, \dots, m,
\end{aligned} \tag{3.141}$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$, где Φ_q – непрерывно дифференцируемые координатные функции.

Система управления описывается относительно координаты входа нелинейного звена следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned}
& (p^4 + 12,1p^3 + 18p^2 + 7,4p + 0,3)x(t) + \\
& + (28,9052p^3 + 93,4151p^2 + 105,3176p + 3,6301)(K_1 + K_2p)x^*(t) + \\
& + K_3p(28,9052p^3 + 93,4151p^2 + 105,3176p + 3,6301) \cdot F[x(t), D\{x(t)\}] = \\
& = (28,9052p^3 + 93,4151p^2 + 105,3176p + 3,6301)(K_1 + K_2p)f^*(t).
\end{aligned}$$

В ходе решения задачи параметрического синтеза системы, с периодом квантования 0,05 с, необходимо определить положительные значения варьируемых параметров, которые обеспечивают перерегулирование переходного процесса в пределах 37 % и времени затухания не более 1 с.

В результате решения поставленной задачи были найдены варьируемые параметры регулятора: $K_1 = 0,01$, $K_2 = 0,02$, $K_3 = 0,000168$. На рисунке 3.11 представлена характеристика полученного переходного процесса.

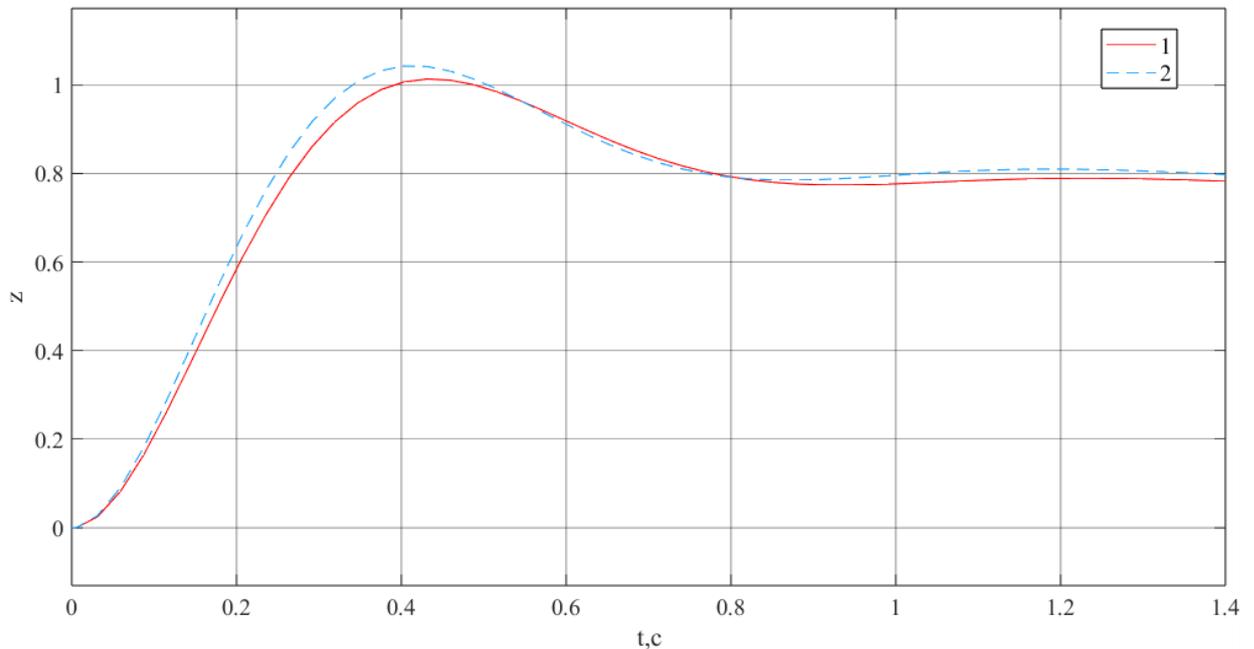


Рисунок 3.11 – График переходных процессов

где процесс 1 – желаемое программное движение, полученное в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], процесс 2 – переходной процесс, полученный в результате синтеза.

Таким образом, при решении поставленной задачи были определены варьируемые параметры регулятор, а также график переходного процесса системы, из которого следует вывод о том, что заданные параметры приблизительно обеспечивают заданные показатели качества работы системы в переходном режиме [108-111].

3.5 Выводы

По материалам раздела могут быть сделаны следующие выводы:

1. Проанализированы структурные линейные и нелинейные импульсные системы автоматического управления с распределенными параметрами, и на примерах показана возможность перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

2. Обобщенный метод Галеркина распространен для решения задач параметрического синтеза линейных и нелинейных импульсных систем автоматического управления с распределенными параметрами. Параметры импульсных систем определяются из условий приближенного обеспечения заданных показателей качества работы в переходном режиме: времени переходного процесса, перерегулирования и колебательности. Конечно, в зависимости от изменяемых параметров обеспечивается устойчивость и грубость синтезируемой САУ. В вычислительном плане задача синтеза сводится к переходу от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и, к решению обратной задачи динамики методом нелинейного программирования.

3. С использованием усовершенствованных методов, алгоритмов и процедур решена задача синтеза импульсных систем с распределенными параметрами.

Основные результаты, полученные в данном разделе, опубликованы автором в работах [108-113].

4 ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящем разделе реализуется модифицированный алгоритм метода параметрического синтеза непрерывных систем автоматического управления с распределенными параметрами с целью улучшения их технических характеристик на примере модели трубопровода для термической жидкости, модели длинной линии электропередач. Решены задачи параметрического синтеза, когда исследуемые объекты находятся в составе САУ.

4.1 Моделирование трубопровода для термической жидкости

Известные объекты систем автоматического регулирования можно рассматривать с помощью математического моделирования. Так как САУ с распределенными параметрами являются более сложными в математическом представлении и обладают пространственной протяженностью, в действительности известны методы их приведения к более простым объектам систем, например, САУ с запаздыванием. Такие допущения можно выполнять исключительно в конкретных случаях, для конкретных объектов систем.

Рассмотрим пример одномерной САУ с распределенными параметрами для регулировки давления (рисунок 4.1).

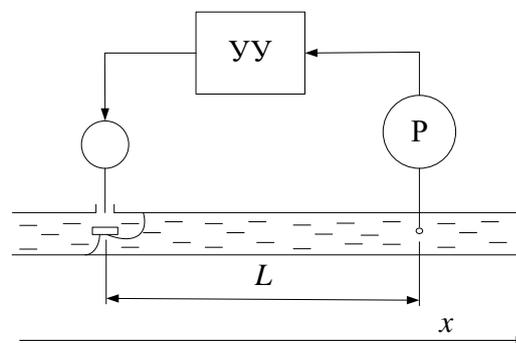


Рисунок 4.1 – Одномерная САУ регулирования давления с распределенными параметрами

где УУ – управляющее устройство; Р – измерительное устройство.

В трубопроводе с жидкостью происходит регулировка давления, регулируемое измерительным устройством. Управляющее устройство принимает измерения и сравнивает с заданными значением давления. В случае отклонения результатов измерения от установленных, УУ подает сигнал на привод клапана и изменяет его проходное сечение таким образом, чтобы минимизировать отклонение. Полученный результат воздействия будет воспринят УУ только после того, как волна давления равномерно распределится по трубопроводу до измерительного устройства. То есть система обладает признаками запаздывания, которое в представленной системе получено в результате распределенности свойств потока жидкости вдоль всей длины трубопровода. Поток движения жидкости в длинном трубопроводе может быть описан дифференциальными уравнениями в частных производных [116]:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где v - скорость движения жидкости в точке с координатой x вдоль трубопровода; h - напор жидкости в этой точке; a - скорость звука в жидкости, g - ускорение силы тяжести.

Таким образом, системой с распределенными параметрами называется система, процесс в которой может быть описан дифференциальными уравнениями в частных производных. К таким системам можно отнести системы с длинными гидро- и пневмопроводами; системы, в которых управляемая величина является характеристикой пространственного поля (тепловые поля, электромагнитные поля) и др. В этих системах наблюдаются волновые процессы, учет которых и приводит к появлению дифференциальных уравнений в частных производных.

Другим примером САУ с распределенными параметрами с запаздывающим аргументом можно считать систему регулирования давления газа в трубопроводе, к концам которой подключены потребители, при условии, что расход газа у

потребителей изменяется произвольно во времени. В таком случае процесс может быть описан следующим дифференциальным уравнением в частных производных [116]:

$$F\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) = 0. \quad (4.2)$$

Представленное уравнение получено на основе закона движения потока сжимаемого газа, которое может быть описано уравнением:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial l} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial l} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial l} = 0, \\ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k = \frac{p}{p_0}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где ω , p , ρ - скорость, давление и плотность газа; k - показатель адиабаты; l - координата вдоль длины трубопровода.

После перехода к относительным величинам:

$$\varphi = \frac{\Delta p}{p_0}, \lambda = \frac{l}{L}, \psi = k \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega_0}, \quad (4.4)$$

где l - полная длина трубопровода, то уравнения трубопровода примет вид:

$$\begin{cases} \gamma^2 T_0 = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \\ T_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $T_0 = \frac{L}{\omega_0}$, $\gamma = \frac{\omega_0}{a}$ - относительные величины времени и скорости соответственно.

Полученное решение уравнений в частных производных для рассматриваемой САУ записано в виде:

$$\begin{cases} \varphi = \phi'(t - \gamma T_0 \lambda) + \phi''(t + \gamma T_0 \lambda), \\ \psi = \frac{1}{\gamma} [\phi'(t - \gamma T_0 \lambda) - \phi''(t + \gamma T_0 \lambda)], \end{cases} \quad (4.6)$$

где ϕ' и ϕ'' функции, определяемые свойствами САУ и граничными условиями.

Полученное в [74, 116-117] уравнение содержит запаздывающий аргумент для функций ϕ' и ϕ'' , и по своей структуре аналогично описанию системы с запаздыванием. Таким образом, свойства системы с распределенными параметрами подобны свойствам систем с запаздыванием и оба типа систем имеют одинаковый вид описания. Величина запаздывания определяется свойствами САУ.

В ходе исследования было проведено моделирование трубопровода для термической жидкости [118]. Для наглядности полученных результатов и оценки адекватности модели в зависимости от изменения количества сегментов, времени моделирования и длины трубопровода, схема из [118] была представлена следующим образом (рисунок 4.2).

С целью решения задач исследования была построена модель трубопровода для термической жидкости (рисунок 4.2),

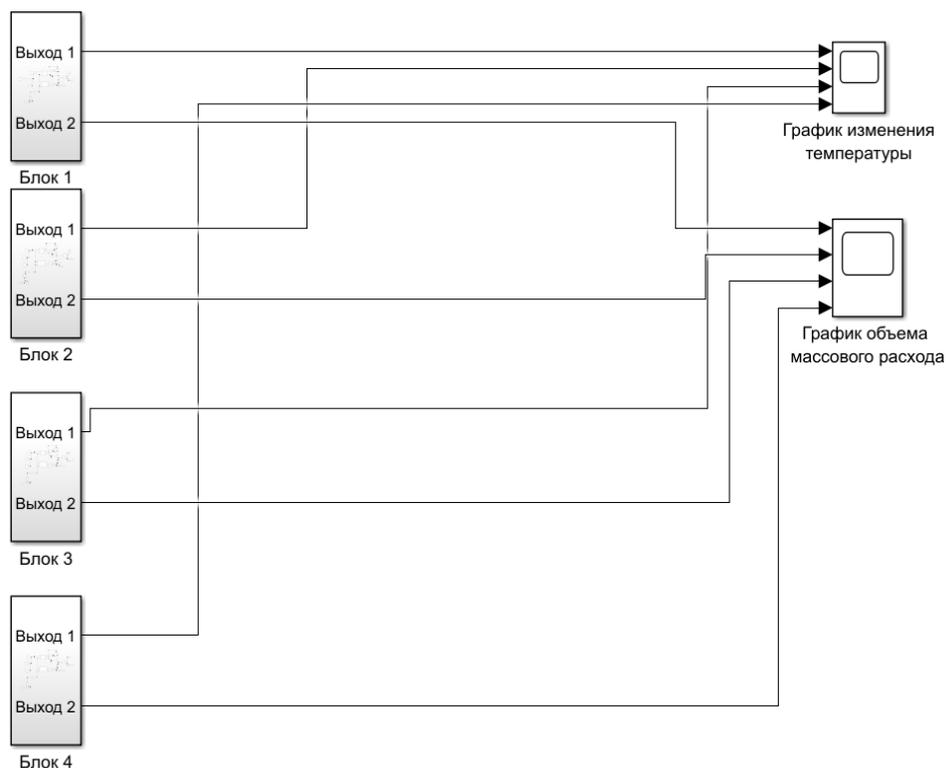


Рисунок 4.2 – Модель трубопровода для термической жидкости

где блоки 1, 2, 3 и 4 представляют собой идентичные схемы, представленные на рисунке 4.3.

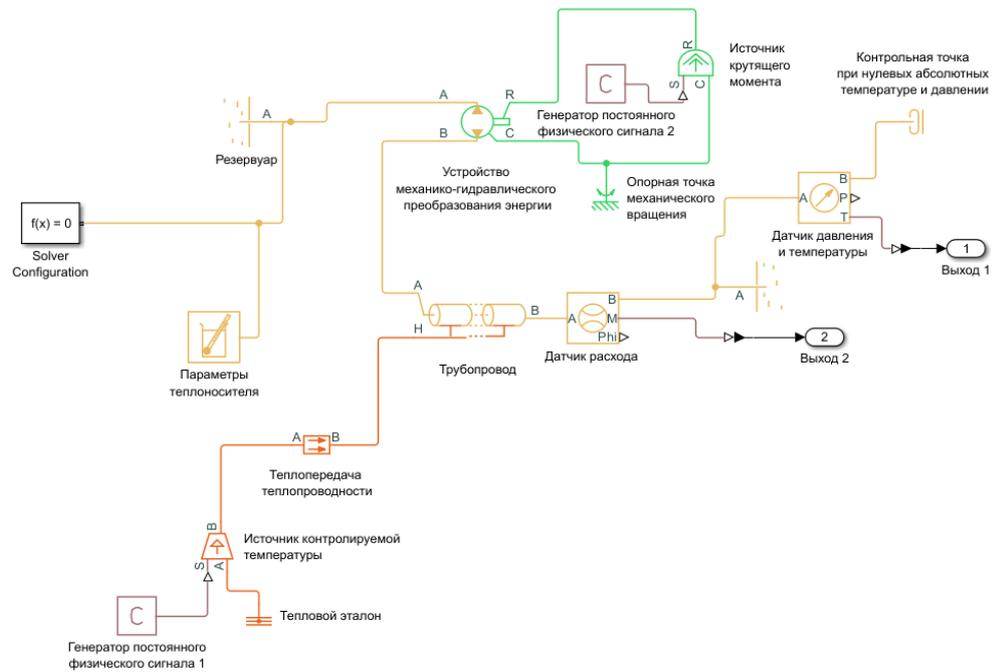


Рисунок 4.3 - Модель одного блока трубопровода для термической жидкости

Модель одного блока трубопровода состоит из насоса, трубы и двух резервуаров для термической жидкости. Насос вырабатывает энергию, а труба перемещает жидкость между резервуарами. Резервуары действуют как граничные условия давления и температуры для трубопроводной системы.

На рисунке 4.3 в блоке «Генератор постоянного физического сигнала» заданы параметры температуры внешней поверхности трубы на уровне 275 [К]. В блоке «Трубопровод» задаются значения длины трубы 10 [км] и 200 [км], а также количество сегментов трубопровода. Сегментом является часть трубопровода из общей его длины. Длина сегмента определяется по формуле:

$$L_s = \frac{L}{n}, \quad (4.7)$$

где n – количество сегментов.

В блоке «Теплопередача теплопроводности» задается площадь поверхности трубы в пересчете на гидравлический диаметр (1.153 [м]) и длину трубопровода. Значение теплопроводности по умолчанию для стали, 92 [Вт/мК]. В блоке «Генератор постоянного физического сигнала 2» значение момента задано 50 [Н·м].

Трубопровод по своей сути является элементом распределенных параметров, который представлен набором идентичных, соединенных последовательно, сосредоточенных сегментов. Предполагается, что чем больше количество сегментов, тем ближе модель с сосредоточенными параметрами становится к ее аналогу с распределенными параметрами.

Основные результаты проведенного исследования изложены в [119]. Исходя из проведенных исследований следует, что чем меньше длина трубопровода, тем быстрее объект САУ выходит на установившееся значение, а значит потери тепла минимальны, что является основным свойством для моделирования трубопровода с термической жидкостью. С увеличением количества сегментов объекта моделирования происходит более быстрое падение температуры, что негативно сказывается на основах физики функционирования объекта системы. При $n > 1$ изменение температуры входит в 5% зону отклонения.

А также, при малых значениях длины, скорость выхода на установившееся значение не зависит от количества сегментов. При этом с увеличением длины трубопровода скорость выхода САУ на установившееся значение не меняется, но имеет линейную зависимость от длины. Соответственно, чем больше длина, тем больше времени необходимо для выхода на установившееся значение и наоборот для меньшей длины. При $n > 1$ скорость массового расхода жидкости входит в 5% зону отклонения.

Как было сказано ранее объект с распределенными параметрами может рассматриваться как звено запаздывания. Для этого была построена модель (рисунок 4.4), где блоки 1 и 2 являются идентичными, состав которых показан на рисунке 4.3. Модель включает в себя звено запаздывания, которое позволяет выставить задержку на указанное количество времени. В работе были использованы значения $n=1$, $L=10$ [км], время задержки 1 [с], время моделирования процесса 5 [с].

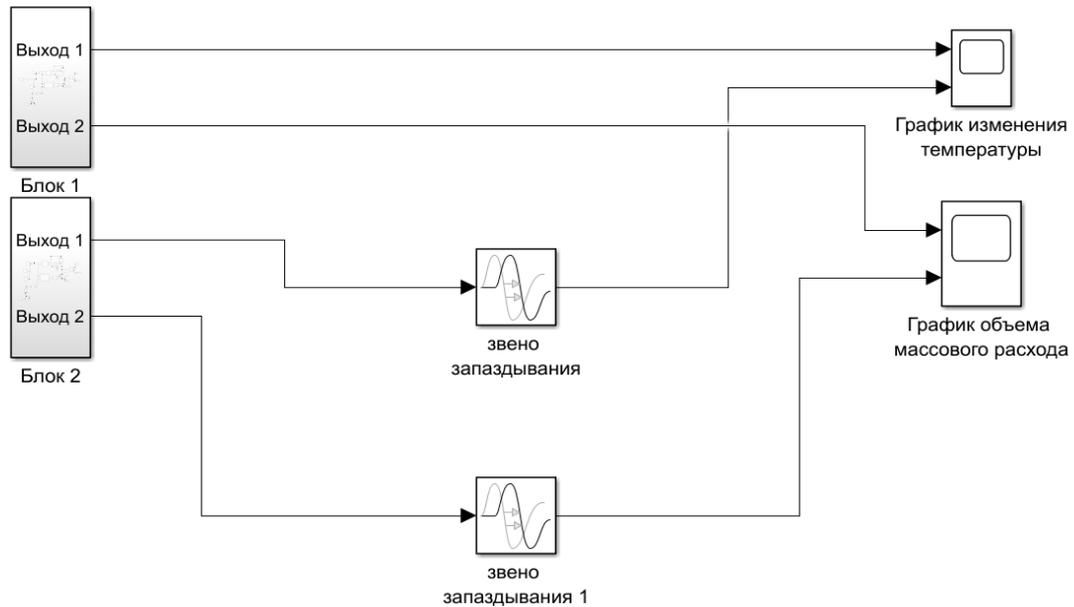


Рисунок 4.4 – Модель трубопровода для термической жидкости при $n=1$, $L=10$ км, время задержки 1 с

Основные результаты проведенного исследования изложены в [119]. Исходя из проведенных исследований следует вывод о том, что один сегмент в рассмотренной модели можно считать квазиоптимальным к звену запаздывания. Основы физики функционирования системы в таком случае не меняются [119].

Для решения задачи синтеза модифицированным обобщенным методом Галеркина, рассмотренный объект системы, который описан выражением (4.1) приведем к стандартному виду. А именно, используя [112] реализуем переход от системы дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Необходимо в двумерной области: $D = \{(x, t) | a \leq x \leq b, t \geq 0\}$ найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}U - K(x, t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K(x, t) \cdot \left(\frac{d}{dx}U \right) - \beta(x, t) \cdot U = g(x, t), \quad (4.8)$$

удовлетворяющее двум краевым условиям:

$$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

и начальному условию: $u(x,0) = f(x)$.

Рассмотрим случай, когда функции K , β , g , a_2 , b_2 не зависят от t . Введем непрерывные функции уравнения $K(x)$, ($K > 0$), $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$ и числовые параметры задачи:

$$\begin{aligned} c_1 = 0,3; c_2 = 1; c_3 = 0,5; c_4 = 1,4; K(x) = c_1; \beta(x) = 0; g(x) = 0; \\ a = 0; b = 2; a_0 = 1; a_1 = 0; a_2 = c_2; b_0 = 1; b_1 = 0; b_2 = c_3; \end{aligned}$$

$$f(x) = c_4 \cdot x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c_2, \quad (4.10)$$

то есть

$$f(x) = x^2 - \frac{(\pi^2 - 1)}{\pi} + 1. \quad (4.11)$$

Например, для наглядности введем конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование: $T=3$ с.

Следующим этапом алгоритма является получение точного решения $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x)=0$, $\gamma(x)=0$, $K(x)=c_1=const$, то используя метод разделения переменных [103]:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= Q(x,t) + f(t) + \psi(t), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= K^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + f'(t) + \psi'(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

то есть изменим уравнение, сделаем его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K^2 \frac{\partial Q}{\partial x^2} - f'(t) - \psi'(t). \quad (4.13)$$

При чем $Q(a_2, t) = 0$, $f(b_2, t) = 0$, тогда $U(0, t) = 0 + 0 + \psi(t) = \alpha(t)$,
 $U(b_2, t) = 0 + f(t)b_2 + \psi(t) = \beta(t)$,

$$f(t) = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{b_2}. \quad (4.14)$$

Таким образом однородное уравнение представляем в виде неоднородного, при этом у Q изменяем граничные условия:

$$\begin{aligned} U(x,0) &= f_0(x) = Q(x,0) + f(0)x + \psi(0) = \\ &= Q(x,0) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x + \alpha(0), \end{aligned} \quad (4.15)$$

то есть начальные условия для функции Q :

$$\begin{aligned} Q(x,0) &= f_0(x) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x - \alpha(0), \\ Q(a_2,t) &= 0, \quad Q(b_2,t) = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Далее разделим правую часть уравнения и граничные условия по разным функциям, то есть оба уравнения будут являться решением одного и того же уравнения:

$$Q(x,t) = U(x,t) + V(x,t). \quad (4.17)$$

Получим однородное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (4.18)$$

и неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(t)x - \psi'(t). \quad (4.19)$$

После подстановки (4.14) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2}x - \alpha'(t), \quad (4.20)$$

при этом

$$\begin{aligned} U(x,0) &= f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2}x + \alpha(0), \\ V(x,0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial(U+V)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t) = \\ &= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t),\end{aligned}\quad (4.22)$$

при этом

$$Q(x, 0) = U(x, 0) + V(x, 0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x - \alpha(0), \quad (4.23)$$

с учетом нулевых граничных условий:

$$U(a_2, t) = 0, \quad U(b_2, t) = 0, \quad V(a_2, t) = 0, \quad V(b_2, t) = 0,$$

из начальных условий: $U(a_2, t) = A(0)B(t) = 0, U(b_2, t) = A(l)B(t) = 0, B(t)$ не может быть равно 0, тогда U всегда будет равно 0.

Получим $A(a_2) = 0, A(b_2) = 0$. Далее разделяем функцию на две части:

$$\begin{aligned}U(x, t) &= A(x)B(t), \\ A(x)B'(t) &= K^2 A''(x)B(t), \\ \frac{B'(t)}{K^2 B(t)} &= \frac{A''(x)}{A(x)} = M, \\ A''(x) - MA(x) &= 0.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то

$$A_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{b_2}, \quad (4.25)$$

где $M = -\left(\frac{\pi k}{b_2}\right)^2$, поскольку $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b_2}$, при чем $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом k не может быть равно 0 и не может быть отрицательным, так как $\sqrt{-M}$ положительный:

$$\begin{aligned}B_k' &= MK^2 \beta(t) - \left(\frac{\pi k K}{b_2}\right)^2 B_k(t), \\ B_k &= e^{-\left(\frac{\pi k K}{b_2}\right)^2 t}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Соответственно

$$U_k(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi k K}{a_2 - b_2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2}\right). \quad (4.27)$$

Поскольку уравнение линейное, решение существует, умножив уравнение на любой числовой множитель и сложив с другим таким решением, получим:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k c_1}{a_2 - b_2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2}\right). \quad (4.28)$$

Поскольку начальное значение:

$$U(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x + \alpha(0), \quad (4.29)$$

то

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \sum_{k=1}^M A_k \cdot e^{-c_1 \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2} t} \sin\left(\frac{k \pi x}{b-a}\right). \quad (4.30)$$

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=3$ точность составляет 0,001; для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=4$.

Если $a_1=0$, $b_1=0$, то функция $U_0(x, t)$ примет вид:

$$U_0(x) = \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b-a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) \cdot x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b-a)}, \quad (4.31)$$

$$U_0(x) = 0.25x + 1.$$

Вычислим коэффициенты A_k при ($i = 1 \dots M$):

$$A_{2i-1} = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx, \quad (4.32)$$

$$f(x) - U_0(x) = 1.4x^2 - 2.8x.$$

Соответственно, точное решение $U(x, t)$ имеет вид:

$$UT(x,t) = U_0(x) + \sum_{k=1}^M \left[A_{2k-1} \cdot e^{-c_1 t \cdot \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{b-a}\right) \right]. \quad (4.33)$$

Получим матрицу U_1 точного решения, разбив отрезок $[a,b]$ на десять частей при $t=0; 0,1 T; 0,2T; \dots, T$; при ($i = 0 \dots 10, j = 0 \dots 10$):

$$U_{1i,j} = UT \left[a + (b-a) \cdot \frac{i}{10}, \frac{j \cdot T}{10} \right]. \quad (4.34)$$

Получим матрицу точного решения при $t=0; 0,1T; 0,2T; \dots, T$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,46 & 0,59 & 0,66 & 0,721 & 0,766 & 0,803 & 0,832 & 0,856 & 0,874 & 0,889 & 0,902 \\ -0,0002 & 0,21 & 0,35 & 0,464 & 0,551 & 0,62 & 0,676 & 0,721 & 0,756 & 0,785 & 0,808 \\ -0,335 & -0,09 & 0,1 & 0,25 & 0,369 & 0,465 & 0,542 & 0,603 & 0,652 & 0,692 & 0,723 \\ -0,543 & -0,3 & -0,08 & 0,094 & 0,235 & 0,347 & 0,437 & 0,51 & 0,567 & 0,614 & 0,651 \\ -0,641 & -0,4 & -0,18 & 0,008 & 0,156 & 0,274 & 0,369 & 0,445 & 0,505 & 0,554 & 0,593 \\ -0,643 & -0,4 & -0,18 & -0,006 & 0,135 & 0,247 & 0,337 & 0,41 & 0,467 & 0,514 & 0,551 \\ -0,535 & -0,3 & -0,1 & 0,05 & 0,169 & 0,265 & 0,342 & 0,403 & 0,452 & 0,492 & 0,523 \\ -0,3 & -0,1 & 0,054 & 0,164 & 0,251 & 0,32 & 0,376 & 0,421 & 0,456 & 0,485 & 0,508 \\ 0,06 & 0,2 & 0,263 & 0,321 & 0,366 & 0,403 & 0,432 & 0,456 & 0,474 & 0,489 & 0,502 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Зададим переменную $n=2$, которая представляет собой количество решений.

Получим график точного решения (рисунок 4.5) при $t=T$.

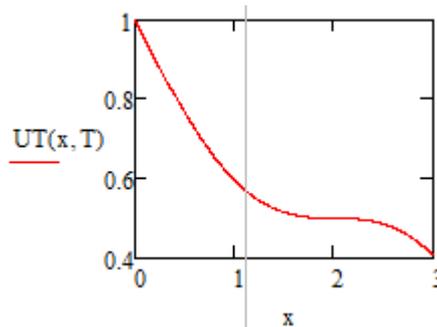


Рисунок 4.5 – График точного решения $UT(x, T)$

Далее необходимо получить приближенное решение. Используя приближенные функции в следующем виде, при $(k=1 \dots n)$:

$$V_0(k, x) = (x-a)^k \cdot (x-b). \quad (4.35)$$

Необходимо нормировать их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты и выпишем их аналитические выражения при $(i=1 \dots n)$:

$$VV_{i-1} = \sqrt{\int_a^b (V_0(i, x))^2 dx}. \quad (4.36)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{V_0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2)}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right], \quad (4.37)$$

$$V(0, x) = 1.$$

Введем функции $V_1(k, x)$ и $V_2(k, x)$, равные первой и второй производной от функции $V(k, x)$ при $(k = 1 \dots n)$:

$$V_1(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{(x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b_2 \cdot a_0 - b_0 - a_2}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b-a)} \right], \quad (4.38)$$

$$V_2(k, x) = if \left[k \neq 0, \frac{2 \cdot k \cdot (x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, 0 \right].$$

В качестве проверочных функций возьмем приближенные $W(k, x) = V(k, x)$.

Для дальнейшего получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами, введем в рассмотрение матрицы, элементы которой являются коэффициентами системы дифференциального уравнения:

$$A \cdot \left(\frac{d}{dt} H \right) = C \cdot H + B. \quad (4.39)$$

Для нахождения функций $H_k(t)$ с начальными условиями $A \cdot H(0) = D_1$ при $(i = 1 \dots n, j = 1 \dots n)$:

$$B_{i-1} = \int_a^b \left(K(x) \cdot V_2(x, 0) + \frac{d}{dx} K(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(0) \cdot V(0, x) + g(x) \right) \times \\ \times W(i, x) dx, \quad (4.40)$$

$$A_{i-1, j-1} = \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx, \quad (4.41)$$

$$C_{i-1, j-1} = \int_a^b \left[K(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(j, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} V(j, x) \right) + \beta(x) \cdot V(j, x) \right] \times \\ \times W(i, x) dx, \quad (4.42)$$

$$D_{1 i-1} = \int_a^b (f(x) - V(0, x)) \cdot W(i, x) dx. \quad (4.43)$$

Приведем систему к виду:

$$\frac{d}{dt} \cdot H = A_1 \cdot H + B_1, \quad (4.44)$$

$$A_1 = A^{-1} \cdot C. \quad (4.45)$$

с начальными условиями: $H(0) = D_2$, $B_1 = A^{-1} \cdot B$, $D_2 = A^{-1} \cdot D_1$.

Найдем решение получившейся системы дифференциальных уравнений:

$$H = D_2, D(t, H) = A_1 + B_1, \quad (4.46)$$

$$Y_{n,k} = \begin{pmatrix} H_1(T) \\ H_2(T) \\ \dots \\ H_n(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.152 \\ 1.5 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид: $U(x, 1) = U_0(x) + 0.152U_1(x) \cdot 1.5 \cdot 10^{-15}U_2(x)$.

Приближенное решение $U(x)$:

$$U(x) = V(0, x) + \sum_{k=1}^n (V(k, x) \cdot Y_{n,k}). \quad (4.47)$$

На рисунке 4.6 представлены полученные графики приближенного и точного решений.

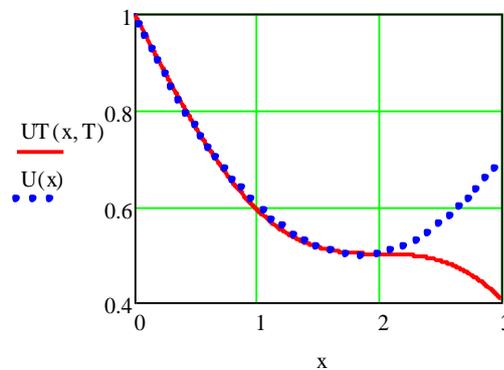


Рисунок 4.6 –Графики приближенного $U(x)$ и точного $UT(x, T)$ решений при $n=2$

Из графика видно, что при заданном количестве $n=2$ решений приближенное и точное решения совпадают, что является необходимым при реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для наглядности на рисунке 4.7 показан график приближенного и точного решений при заданном количестве решений $n=3$.

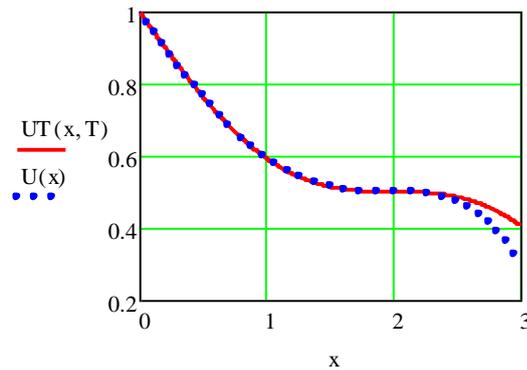


Рисунок 4.7 –Графики приближенного $U(x)$ и точного $UT(x, T)$ решений при $n=3$

Как видно из графиков на рисунках 4.6 и 4.7, точное и приближенное решения совпадают при заданных количествах решений. Количество решений задает размерность матриц A , B , C и точность вычисления приближенного решения. Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении А, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [112].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A , B , C для нахождения передаточной функции звена с распределенными параметрами. Зададим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -0,75 & 2,245 \\ 2,4 & -3,15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1,446 \quad 1,776].$$

Рассмотрим исследованный трубопровод для термической жидкости в составе системы автоматического управления устройства полиграфического производства, функциональная схема которой представлена на рисунке (4.8),

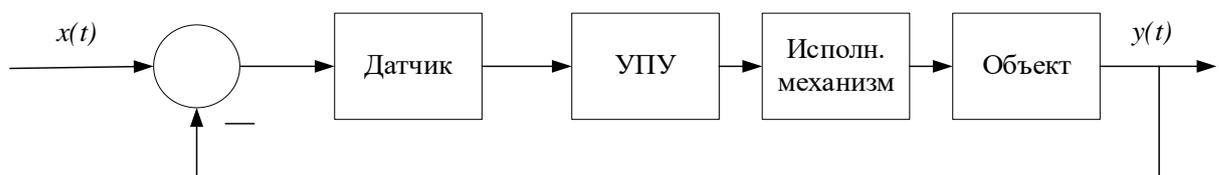


Рисунок 4.8 - Функциональная схема системы управления

где неизменяемая часть функциональной схемы системы управления состоит из $W_1(p)$ – датчик, $W_2(p)$ - исполнительный механизм, $W_3(p)$ - объект управления.

Изменяемая часть функциональной схемы системы управления состоит из УПУ - усилительно-преобразующее устройство, которое реализует алгоритм управления согласно требуемым показателям качества системы управления -

запасу устойчивости по амплитуде (в пределах 10-30 дБ) и запасу устойчивости по фазе (в пределах 30-60 град). Изменяя передаточную функцию УПУ - $W_4(p)$, то есть последовательным включением корректирующего звена, выполняется коррекция и синтез САУ.

Объектом управления в исследуемой системе автоматического управления является температура окружающей среды или жидкости. В зависимости от метода изоляции исследуемого объема: одно- или двухемкостной объект управления может иметь различное математическое описание $W_3(p)$, апериодическим звеном первого порядка либо апериодическим второго порядка.

Датчик, регистрирующий сигнал о температуре окружающей среды или жидкости, поступающий с объекта управления - термоэлемент. Его математическая модель может быть представлена инерционным звеном $W_1(p)$.

Исполнительное устройство, выполняющее управление температурой окружающей среды или жидкости - термонагреватель (ТЭН) с электрическим приводом. Математическая модель исполнительного механизма представляет собой реальное интегрирующее звено (интегрирующее и инерционное) $W_2(p)$ [120].

Следовательно, система контроля температуры жидкости включает в себя два набора элементов контроля температуры, расположенных напротив друг друга и образующих зону контроля температуры между ними. Трубопровод в зоне регулирования температуры образует единый канал потока жидкости, который может иметь различные (первое и второе) сечения для жидкости. Одна или более первых секций расположены вблизи первой группы и имеют с ней теплопроводное соединение, а одна или более вторых секций расположены вблизи второй группы и имеют с ней теплопроводное соединение. Система контроля температуры может использоваться в качестве устройства распределения холодной жидкости или модуля охлаждения или нагрева жидкости в системе, например, питьевой воды или другого устройства распределения напитков.

На рисунке 4.9 представлена структурная схема САУ.

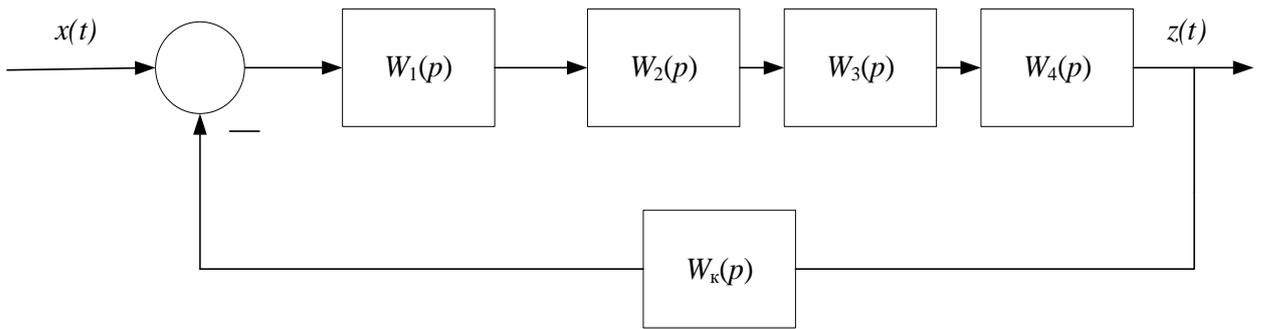


Рисунок 4.9 – Структурная схема системы автоматического управления

Решая задачу параметрического синтеза САУ с распределенными параметрами модифицированным обобщенным методом Галеркина [93], путем перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [112], внесем изменения в схему управления (рисунок 4.10),

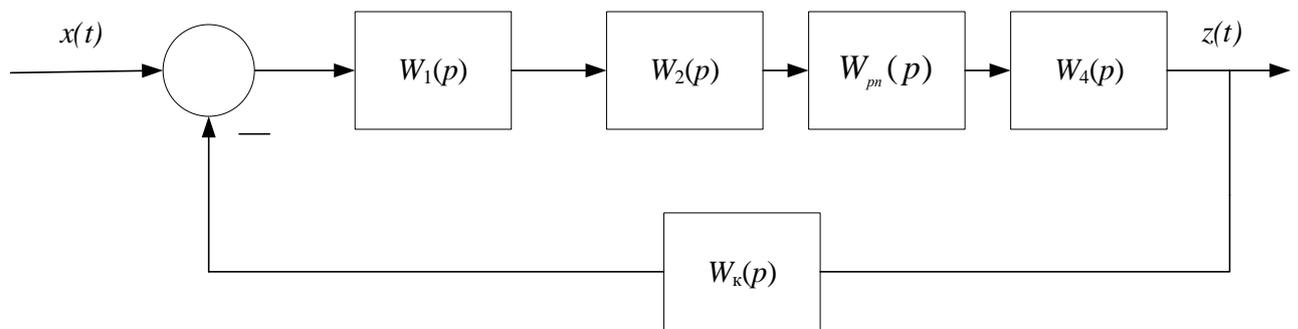


Рисунок 4.10 – Структурная схема системы автоматического управления

где передаточные функции системы управления:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1 p + 1}, W_2(p) = \frac{K_2}{T_2 p + 1}, W_4(p) = \frac{K_4}{T_4 p + 1}, W_k(p) = \frac{K_3}{T_3 p + 1}, \quad (4.48)$$

$W_k(p)$ – передаточная функция корректирующего звена; T_1, T_2, T_3, T_4 - варьируемые параметры системы, которые определяются в процессе синтеза корректирующего устройства системы; K_1, K_2, K_3, K_4 – коэффициенты передачи.

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$W_{pn}(p) = C(pI - A)^{-1} B = [c_1 \quad c_2] \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1.776p + 3.2}{p^2 + 3.9p + 3}.$$

В соответствии с п.п. 2.2 запишем уравнение движения, описывающее динамику представленной системы управления:

$$Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) = f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right). \quad (4.49)$$

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = \left[x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \right] 1(t), \quad (4.50)$$

где $x_y = 1, 2; H_1 = 1; \alpha = 8; \beta = 17 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0, 6 \text{ рад}$.

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) - f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right). \quad (4.51)$$

Запишем алгебраическое уравнение:

$$\int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\varphi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t) \cdot \varphi_q(t)dt - \int_0^{\infty} f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right) \cdot \varphi_q(t)dt = 0, \quad (4.52)$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Система управления описывается относительно координаты выхода следующим дифференциальным уравнением:

$$\left[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(p^2 + 3.9p + 3)(T_4 p + 1)(T_3 p + 1) \right] x(t) + K_1 K_2 \cdot (1.776p + 3.2) \cdot K_4 \cdot K_3 \cdot x(t) = K_1 K_2 K_3 K_4 (1.776p + 3.2) f(t). \quad (4.53)$$

В ходе решения задачи синтеза необходимо, чтобы $K_1 > 0, T_1 > 0, K_2 > 0, T_2 > 0, K_3 > 0, T_3 > 0, K_4 > 0, T_4 > 0$ обеспечивали САУ при $T=0,2$ и внешнем скачкообразном воздействии $f(t)=1(t)$ переходной процесс с перерегулированием на уровне $\sigma \approx 20\%$ и времени затухания $T_{п.п} \approx 0,5 \text{ с}$.

Получим график переходного процесса системы (рисунок 4.11),

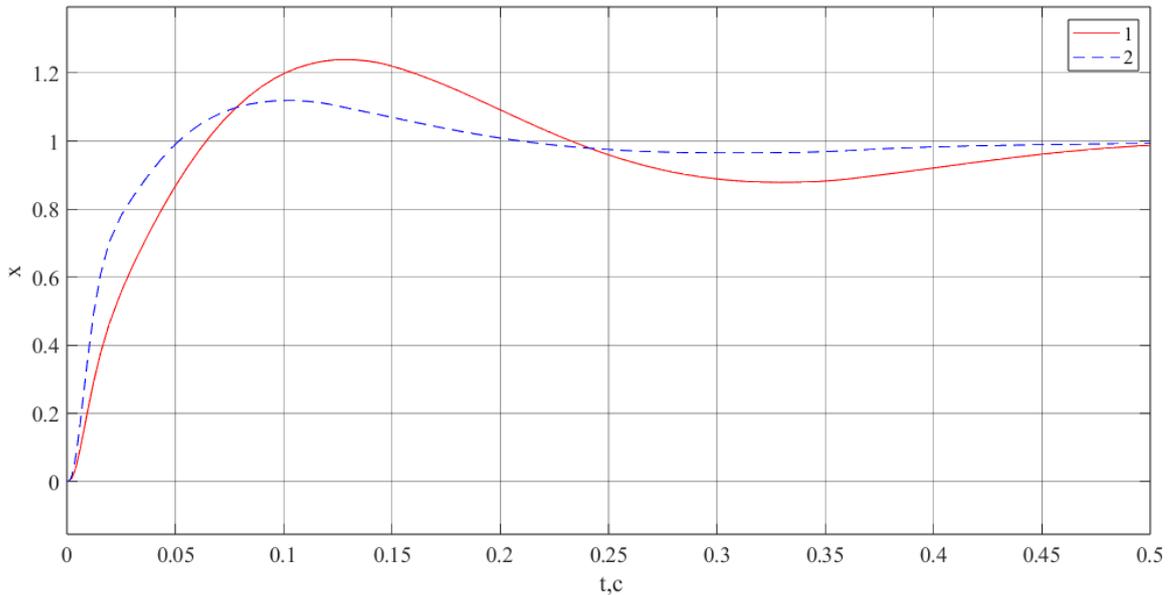


Рисунок 4.11 - Графики переходных процессов

где процесс 1 – желаемое программное движение, полученное в соответствии с рекомендациями, изложенными в [88], процесс 2 – переходной процесс, полученный в результате синтеза.

В результате решения задачи синтеза с помощью модифицированного обобщенного метода Галеркина получены следующие значения переменных параметров регулятора: $K_1=1,9$; $T_1=0,2$; $K_2=4,9$; $T_2=0,6$; $K_3=1,4$; $T_3=0,1$; $K_4=7,6$; $T_4=2$.

Полученный график переходного процесса показывает, что найденные параметры приблизительно обеспечивают заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме [91-92, 104].

4.2 Исследование модели длинной линии электропередач

Поскольку объекты с распределенными параметрами представляют технически более сложные системы в математическом представлении, на практике существуют методы их упрощения, сведение их к более простым объектам в составе систем автоматического управления (САУ), в частности системы с сосредоточенными параметрами. Такие упрощения возможно проводить лишь в

конкретных случаях, для конкретных систем. Рассмотрим некоторые примеры моделей с распределенными параметрами.

Линии электропередач разделяют на воздушные и кабельные линии, в которых проводящие жилы разделены (изолированы) друг от друга и от внешней среды. Длинные линии представляют собой наиболее массовые элементы электроснабжения, которые связывают между собой как отдельные, так и узловые точки схемы.

Рассматриваемый объект наряду с широкой применимостью в электроэнергетике, имеют ключевые особенности, основной из которых является равномерная распределенность параметров вдоль линии электропередач. Поскольку точный расчет электрических схем линий электропередач с распределенными параметрами приводит к сложным, громоздким вычислениям, на практике расчеты чаще всего пытаются минимизировать, но с четкими ограничениями по параметрам минимизации.

В [71] показан пример моделирования однофазной линии электропередач с сосредоточенными параметрами (рисунок 4.12). В реальной линии электропередачи сопротивление, индуктивность и емкость распределяются вдоль линии. Приближенная модель высоковольтной линии может содержать как одну, так и несколько идентичных секций с сосредоточенными параметрами. Количество секций в данном случае будет определяться частотным диапазоном, который необходимо охватить при моделировании. Число секций можно также определить исходя из выражения:

$$f_{\max} = \frac{Nv}{8l}, \quad (4.54)$$

где f_{\max} – максимальная частота; $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – скорость распространения в км/ч при измерении индуктивности в Гн/км и емкости Ф/км; l – длина линии в км; N – число секций.

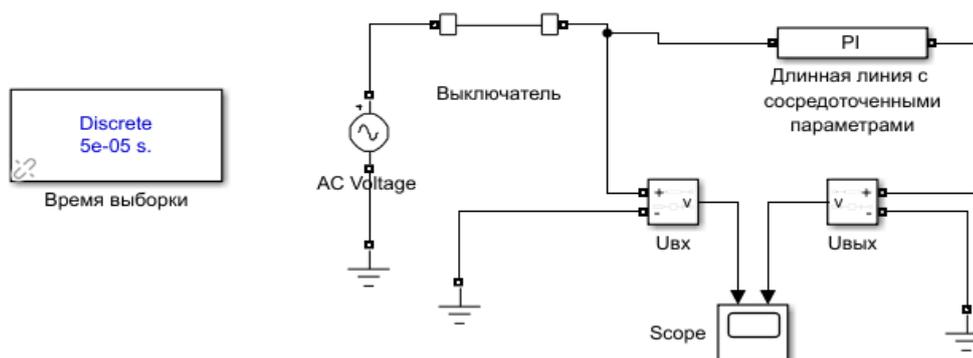


Рисунок 4.12 – Схема линий электропередач с сосредоточенными параметрами

Исходные параметры моделирования системы $f=60$ [Гц]; $R=0,0955$ [Ом/ на 1 км], $L=2,137 \cdot 10^{-3}$ [Гн/на 1 км]; $C=12,37 \cdot 10^{-9}$ [Ф/на 1 км]; $l=1; 10; 50; 200; 1000; 5000$ [км], $n=1$.

Используя схему с сосредоточенными параметрами (рисунок 4.12), было проведено моделирование процесса отключения от источника и подключение к нему линии электропередач длиной 1 км, 10 км, 50 км, 200 км, 1000 км и 5000 км. Модель представленной линии имеет одну секцию. На рисунке 4.13 изображена схема одной секции блока с сосредоточенными параметрами.

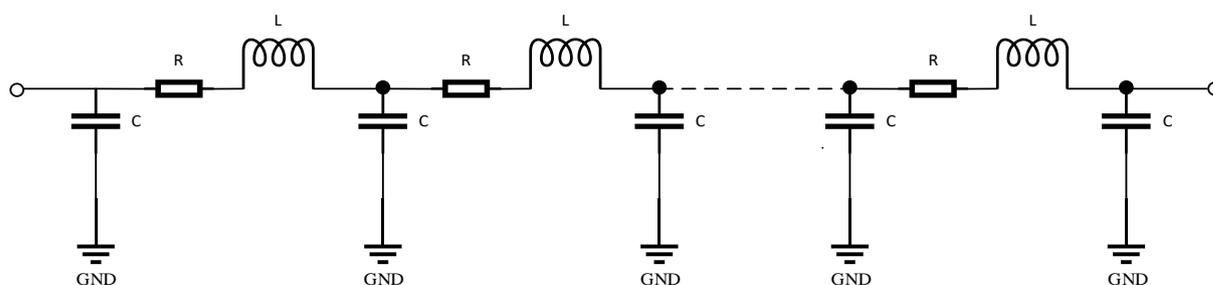


Рисунок 4.13 - Схема одной секции блока с сосредоточенными параметрами

В [71] показан пример моделирования однофазной линии электропередач с распределенными параметрами (рисунок 4.14).

Используемый блок моделирует многофазную линию электропередачи с распределенными параметрами.

На рисунке 4.14 представлена схема линий электропередач с распределенными параметрами. Было проведено моделирование процесса отключения от источника и подключения к нему линии электропередач длиной 1

км, 10 км, 50 км, 200 км, 1000 км и 5000 км. В схеме были использованы те же параметры, что и для системы с сосредоточенными параметрами.

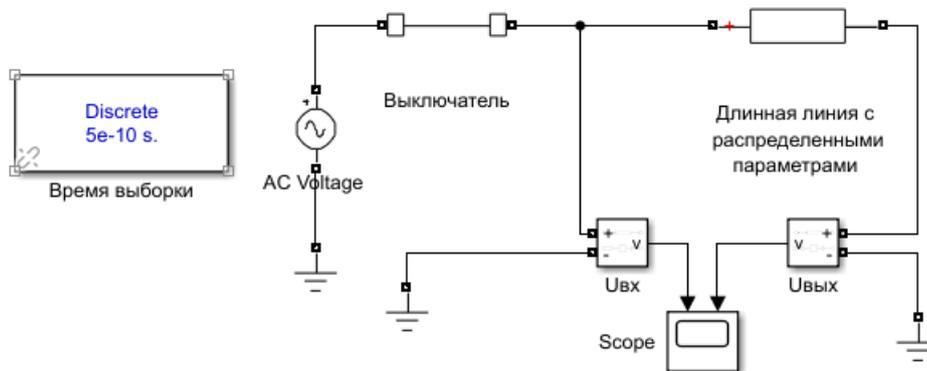


Рисунок 4.14 - Схема линий электропередач с распределенными параметрами

С целью исследования модели объекта длинных линий с сосредоточенными и распределенными параметрами была разработана схема (рисунок 4.15), где «Блок 1» - представляет собой схему длинных линий с сосредоточенными параметрами, а «Блок 2» - схему длинных линий с распределенными параметрами.

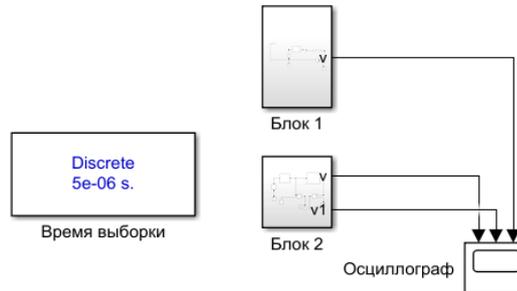


Рисунок 4.15 – Модель длинной линии для исследования объектов с сосредоточенными и распределенными параметрами

Основные результаты проведенного исследования изложены в [116]. В ходе исследования модели с сосредоточенными параметрами видно, что на каждую задаваемую секцию длина линии не может превышать 1000 км, как видно из выражения (4.54) сопротивление линии в таком случае отрицательно. В таком случае необходимо либо увеличивать количество секций, либо использовать модель системы с распределенными параметрами [121].

Исходя из проведенных исследований, следует вывод о том, что в случае длинных линий (линий электропередач) не всегда есть необходимость прибегать к использованию объектов управления с распределенными параметрами. На практике, зачастую, достаточно методов и средств, применяемых для объектов управления с сосредоточенными параметрами. Такое допущение введено в литературных источниках [10-12], оно справедливо для воздушных линий электропередач до 300-350 км, а для кабельных линий электропередач до 50-70 км в силу особенностей эксплуатации. Подобные линии электропередачи в источниках [10-12] авторами классифицируются как местные электрические сети, поэтому обычно сельские линии электропередач рассматривают как объекты с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим исследованный объект управления, длинные линии в составе нелинейной системы автоматического управления из [58], представленную на рисунке 4.16, содержащую звено с распределенными параметрами, на примере которой показаны особенности применения метода, предложенного в [44, 122],

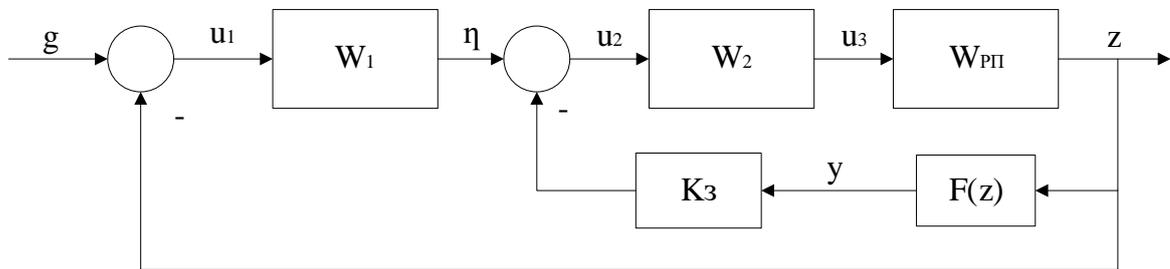


Рисунок 4.16 – Структурная схема САУ

$$W_1(p) = \frac{K_1 + K_2 p}{p}, \quad W_2(p) = \frac{K_3}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}, \quad (4.55)$$

где p – оператор Лапласа, $F(z)$ - нелинейный элемент, характеристика которого представлена на рисунке 4.17, K_1, K_2 – коэффициенты передачи, представляющие собой варьируемые параметры, $W_{рп}(p)$ – передаточная функция звена с распределенными параметрами.

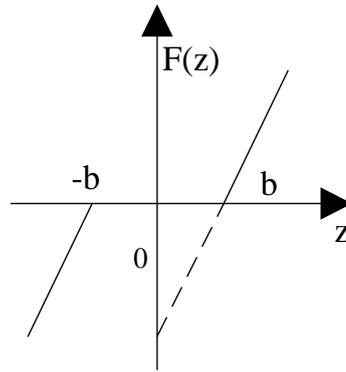


Рисунок 4.17 – Характеристика нелинейного элемента

В качестве звена с распределенными параметрами в [59] рассмотрена длинная линия без потерь, разомкнутая на конце. В этом случае имеем:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{chw(l-x)}{chw} \Big|_{x=l} = \frac{1}{chw}, \quad (4.56)$$

где $\Delta K_0 = K_0 = 0$, $\Delta \lambda_0 = 0$, $\Delta K_1 = K_1 - K_0 = K_1$, $\Delta \lambda_0 = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_1$, z – координата входа нелинейности, которая в случае, рассматриваемой САУ совпадает с выходом системы управления Θ ; t_p – моменты переключения нелинейной характеристики.

Решая задачу параметрического синтеза САУ с распределенными параметрами обобщенным методом Галеркина [93], реализуем переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям [112].

Необходимо найти функцию, удовлетворяющую в двумерной области:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}, \quad (4.57)$$

следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\pi - x)xy, \quad (4.58)$$

или

$$\begin{aligned} K_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + K_4(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + K_5(x, y) \cdot u = \\ = f(x, y). \end{aligned} \quad (4.59)$$

с граничными условиями: $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 10$, или $U(x, y) = U(a, y) = U(x, 0) = U(x, b) = d$.

При $a=\pi$, $b=2$, $c=1$, $d=5$ и $n=3$, зададим непрерывные функции уравнения $K_1(x,y)$, ($K_1>0$), $K_2(x,y)$, ($K_2>0$), $K_3(x,y)$, $K_4(x,y)$, $K_5(x,y)$ и численные параметры: $K_1(x,y)=1$; $K_2(x,y)=2$; $K_3(x,y)=0,2$; $K_4(x,y)=0,5$; $K_5(x,y)=1$; $a=\pi$; $b=2$; $c=1$; $d=5$;

$$f(x,y)=c \cdot (a-x) \cdot x \cdot y. \quad (4.60)$$

Получим точное решение $U(x,y)$, с помощью разложения функции в двойной ряд Фурье, используя метод разделения переменных [103]:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= Q(x,y) + f(y) + \psi(y), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - (\pi-x)xy, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= K^2 \frac{\partial Q}{\partial y} + f'(y) + \psi'(y), \end{aligned} \quad (4.61)$$

то есть изменим уравнение, сделаем его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K^2 \frac{\partial Q}{\partial y} - f'(y) - \psi'(y), \quad (4.62)$$

при чем $Q(a,y) = 0$, $f(b,y) = 0$, тогда

$$U(0,y) = 0 + 0 + \psi(y) = \alpha(y) \quad (4.63)$$

$$U(b,y) = 0 + f(y)b + \psi(y) = \beta(y), \quad (4.64)$$

$$f(y) = \frac{\beta(y) - \alpha(y)}{b}. \quad (4.65)$$

Таким образом однородное уравнение представляем в виде неоднородного, при этом у Q изменяем граничные условия:

$$\begin{aligned} U(x,0) = f_0(x) &= Q(x,0) + f(0)x + \psi(0) = Q(x,0) + \\ &+ \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x + \alpha(0), \end{aligned} \quad (4.66)$$

то есть начальные условия для функции Q :

$$\begin{aligned} Q(x,0) &= f_0(x) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b}x - \alpha(0), \\ Q(a,y) &= 0, \quad Q(b,y) = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Далее разделим правую часть уравнения и граничные условия по разным функциям, то есть оба уравнения будут являться решением одного и того же уравнения:

$$Q(x, y) = U(x, y) + V(x, y). \quad (4.68)$$

Получим однородное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (4.69)$$

и неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(y)x - \psi'(y). \quad (4.70)$$

После подстановки (4.65) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b} x - \alpha'(y), \quad (4.71)$$

при этом

$$U(x, 0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b} x + \alpha(0), \quad V(x, 0) = 0. \quad (4.72)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial(U + V)}{\partial y} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b} x - \alpha'(y) = \\ &= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(y) - \alpha'(y)}{b} x - \alpha'(y), \end{aligned} \quad (4.73)$$

при этом

$$Q(x, 0) = U(x, 0) + V(x, 0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b} x - \alpha(0), \quad (4.74)$$

с учетом нулевых граничных условий:

$$U(a, y) = 0, \quad U(b, y) = 0, \quad V(a, y) = 0, \quad V(b, y) = 0,$$

из начальных условий $U(a, y) = H(0)B(y) = 0$, $U(b, y) = H(l)B(y) = 0$, $B(t)$ не может быть равно 0, тогда U всегда будет равно 0. Получим $H(a) = 0$, $H(b) = 0$.

Далее разделяем функцию на две части:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= H(x)B(y), \\ \frac{B'(y)}{K^2 B(y)} &= \frac{H''(x)}{H(x)} = M, \\ H''(x) - MH(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то

$$H_{km}(x) = \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ky}{b}\right), \quad (4.76)$$

где $M = -\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, поскольку $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b}$, при чем $k \in \mathbb{N}$, соответственно

$$U(x, y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{km} \sin\left(\frac{k \cdot \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \cdot \pi y}{b}\right). \quad (4.77)$$

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=6$ точность составляет 0,001, для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=10$.

Найдем коэффициент H_{km} при ($i = 1 \dots M, j = 1 \dots M$):

$$H_{i-1, j-1} = \frac{-4}{\pi^2 \cdot (i^2 + j^2)} \cdot \left(\int_0^a \int_0^b f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot j \cdot y}{b}\right) dy dx \right). \quad (4.78)$$

Таким образом получим точное решение:

$$U(x, y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{k-1, m-1} \sin\left(\frac{k \cdot \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \cdot \pi y}{b}\right), \quad (4.79)$$

и, матрицу точного решения U_1 в области D при ($i = 1 \dots 10, j = 1 \dots 10$):

$$U_{1i, j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right), \quad (4.80)$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4,956 & 4,914 & 4,876 & 4,845 & 4,823 & 4,815 & 4,822 & 4,853 & 4,909 & 5 \\ 5 & 4,914 & 4,833 & 4,759 & 4,698 & 4,654 & 4,637 & 4,652 & 4,711 & 4,821 & 5 \\ 5 & 4,876 & 4,759 & 4,651 & 4,563 & 4,499 & 4,473 & 4,492 & 4,577 & 4,737 & 5 \\ 5 & 4,845 & 4,698 & 4,563 & 4,45 & 4,369 & 4,333 & 4,355 & 4,46 & 4,664 & 5 \\ 5 & 4,823 & 4,654 & 4,499 & 4,369 & 4,272 & 4,227 & 4,247 & 4,365 & 4,6 & 5 \\ 5 & 4,815 & 4,637 & 4,473 & 4,333 & 4,227 & 4,174 & 4,189 & 4,31 & 4,56 & 5 \\ 5 & 4,822 & 4,652 & 4,492 & 4,355 & 4,247 & 4,189 & 4,194 & 4,303 & 4,545 & 5 \\ 5 & 4,853 & 4,711 & 4,577 & 4,46 & 4,365 & 4,31 & 4,303 & 4,385 & 4,586 & 5 \\ 5 & 4,909 & 4,821 & 4,737 & 4,664 & 4,6 & 4,56 & 4,545 & 4,586 & 4,7 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы видно, что решение $\min(U_1)=4,174$, а $\max(U_1)=5$.

Далее необходимо получить приближенное решение. Для получения приближенного решения введем $n_1 = \sqrt{n} = 3$, которая представляет собой количество решений:

$$U_n = V(0,0,x,y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} C_{k,m} V(k,m,x,y). \quad (4.81)$$

Приближенные функции вида:

$$V_1(k,m,x,y) = x^k \cdot (a-x) \cdot y^m \cdot (b-y), \quad (4.82)$$

после нормирования при $(i=1..n_1, j=1..n_1)$:

$$VV_{i-1,j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i,j,x,y))^2 dx dy}. \quad (4.83)$$

Получаем нормированные приближенные функции вида:

$$V(k,m,x,y) = if \left(k+m \neq 0, \frac{V_1(x,m,x,y)}{VV_{k-1,m-1}}, d \right). \quad (4.84)$$

Для получения проверочных функций, возьмем приближенные функции

$$W(k,m,x,y) = V(k,m,x,y). \quad (4.85)$$

Зададим оператор, соответствующий левой части уравнения:

$$L_1(k,m,x,y,V) = K_1(x,y) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(k,m,x,y) + K_2(x,y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} V(k,m,x,y) + K_3(x,y) \cdot \frac{d}{dx} V(k,m,x,y), \quad (4.86)$$

$$L(k,m,x,y,V) = L_1(k,m,x,y,V) + K_4(x,y) \cdot \frac{d}{dy} V(k,m,x,y) + K_5(x,y) \cdot V(k,m,x,y),$$

и найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для нахождения коэффициентов приближенных решений C_k при $(i_1=1..n_1, j_1=1..n_1, i_2=1..n_1, j_2=1..n_1)$:

$$B_{i_1-1+n_1(j_1-1)} = \int_0^a \int_0^b (f(x,y) - L(0,0,x,y,V)) \cdot W(i,j,x,y) dx dy, \quad (4.87)$$

$$A_{i_1-1+n_1(j_1-1), i_2-1+n_1(j_2-1)} = \int_0^a \int_0^b L(i_2, j_2, x, y, V) \cdot W(i, j, x, y) dx dy. \quad (4.88)$$

Для дальнейшего получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами введем в рассмотрение матрицы $AC=B$, элементы которой являются коэффициентами системы дифференциального уравнения:

Для сравнения получившихся точного и приближенного решений найдем разность получившихся матриц:

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,305 & -0,504 & -0,613 & -0,649 & -0,627 & -0,557 & -0,452 & -0,319 & -0,167 & 0 \\ 0 & -0,437 & -0,743 & -0,936 & -1,027 & -1,031 & -0,957 & -0,813 & -0,603 & -0,333 & 0 \\ 0 & -0,482 & -0,846 & -1,099 & -1,247 & -1,296 & -1,244 & -1,096 & -0,842 & -0,482 & 0 \\ 0 & -0,501 & -0,898 & -1,193 & -1,385 & -1,471 & -1,444 & -1,3 & -1,019 & -0,596 & 0 \\ 0 & -0,526 & -0,948 & -1,268 & -1,481 & -1,585 & -1,569 & -1,426 & -1,129 & -0,669 & 0 \\ 0 & -0,562 & -1,002 & -1,326 & -1,534 & -1,631 & -1,606 & -1,456 & -1,154 & -0,686 & 0 \\ 0 & -0,591 & -1,029 & -1,333 & -1,511 & -1,579 & -1,532 & -1,378 & -1,088 & -0,652 & 0 \\ 0 & -0,561 & -0,952 & -1,202 & -1,329 & -1,356 & -1,289 & -1,143 & -0,898 & -0,542 & 0 \\ 0 & -0,399 & -0,662 & -0,816 & -0,88 & -0,877 & -0,816 & -0,715 & -0,562 & -0,357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{11} = 1,631$.

Для сравнения, найдем предыдущее приближенное решение при $i=1 \dots n_1-1$, $j=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (4.87) и $i_l=1 \dots n_1-1$, $j_l=1 \dots n_1-1$, $i_2=1 \dots n_1-1$, $j_2=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (4.88) и решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_{1k} :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.104 & 1.722 & 3.956 & 4.396 \\ 1.078 & 1.475 & 3.784 & 4.309 \\ 1.857 & 2.403 & 4.422 & 4.871 \\ 1.791 & 2.21 & 4.228 & 4.793 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -3.125 \\ -3.063 \\ -1.725 \\ -1.929 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [3.41 \quad -1.023 \quad 2.185 \quad -3.133].$$

Получим матрицу предыдущего (для $n_1=2$) приближенного решения, разбив область D на 100 частей:

$$UP(x, y) = if \left[n_1 \neq 1, V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{m=1}^{n_1-1} c_{1k-1+(n_1-1)(m-1)} \cdot V(k, m, x, y), V(0, 0, x, y) \right], \quad (4.92)$$

$$i = 0 \dots 10, j = 0 \dots 10,$$

$$U_{3i,j} = UP \left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10} \right). \quad (4.93)$$

Построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$ при U_3 :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5,169 & 5,31 & 5,42 & 5,495 & 5,532 & 5,526 & 5,474 & 5,371 & 5,214 & 5 \\ 5 & 5,273 & 5,495 & 5,662 & 5,771 & 5,818 & 5,799 & 5,712 & 5,552 & 5,315 & 5 \\ 5 & 5,324 & 5,578 & 5,759 & 5,869 & 5,906 & 5,871 & 5,763 & 5,582 & 5,328 & 5 \\ 5 & 5,332 & 5,577 & 5,741 & 5,828 & 5,844 & 5,791 & 5,676 & 5,503 & 5,276 & 5 \\ 5 & 5,304 & 5,515 & 5,64 & 5,692 & 5,679 & 5,612 & 5,5 & 5,355 & 5,184 & 5 \\ 5 & 5,253 & 5,411 & 5,489 & 5,5 & 5,46 & 5,384 & 5,285 & 5,178 & 5,078 & 5 \\ 5 & 5,187 & 5,287 & 5,317 & 5,294 & 5,235 & 5,157 & 5,078 & 5,014 & 4,982 & 5 \\ 5 & 5,116 & 5,163 & 5,157 & 5,115 & 5,051 & 4,984 & 4,929 & 4,902 & 4,921 & 5 \\ 5 & 5,051 & 5,061 & 5,041 & 5,003 & 4,957 & 4,915 & 4,887 & 4,884 & 4,918 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,093 & 0,108 & 0,07 & -0,0005 & -0,082 & -0,155 & -0,2 & -0,2 & -0,138 & 0 \\ 0 & 0,078 & 0,081 & 0,032 & -0,047 & -0,132 & -0,206 & -0,247 & -0,238 & -0,161 & 0 \\ 0 & 0,034 & 0,027 & -0,008 & -0,059 & -0,111 & -0,154 & -0,175 & -0,163 & -0,108 & 0 \\ 0 & 0,015 & 0,019 & 0,015 & 0,007 & -0,004 & -0,014 & -0,021 & -0,023 & -0,017 & 0 \\ 0 & 0,045 & 0,088 & 0,127 & 0,158 & 0,178 & 0,184 & 0,172 & 0,14 & 0,084 & 0 \\ 0 & 0,124 & 0,228 & 0,31 & 0,367 & 0,397 & 0,396 & 0,361 & 0,286 & 0,168 & 0 \\ 0 & 0,226 & 0,394 & 0,508 & 0,572 & 0,591 & 0,564 & 0,493 & 0,377 & 0,214 & 0 \\ 0 & 0,297 & 0,5 & 0,621 & 0,675 & 0,67 & 0,615 & 0,517 & 0,38 & 0,208 & 0 \\ 0 & 0,257 & 0,423 & 0,512 & 0,54 & 0,52 & 0,461 & 0,373 & 0,264 & 0,138 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{21} = 0,675$.

Найдем невязку полученного приближенного решения:

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} \left[c_{k-1+n_1, (m-1)} \cdot L(k, m, x, y, V) + L(0, 0, x, y, V) - f(x, y) \right]. \quad (4.94)$$

Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей:

$$U_{4i,j} = R\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right), \quad (4.95)$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 45 & 42,4 & 41,1 & 40,8 & 41,2 & 42,1 & 43,1 & 44,2 & 44,9 & 45,3 & 45 \\ 39,6 & 37,3 & 35,8 & 34,8 & 34,1 & 33,7 & 33,3 & 32,9 & 32,3 & 31,5 & 30,3 \\ 38,8 & 36,1 & 33,8 & 31,6 & 29,5 & 27,5 & 25,5 & 23,5 & 21,5 & 19,3 & 17 \\ 39,7 & 36,5 & 33,3 & 30 & 26,7 & 23,3 & 19,9 & 16,6 & 13,2 & 9,9 & 6,6 \\ 40,8 & 37,2 & 33,3 & 29,3 & 25,1 & 20,9 & 16,6 & 12,3 & 8,2 & 4,1 & 0,1 \\ 40,9 & 37,2 & 33,2 & 28,9 & 24,5 & 20 & 15,5 & 11 & 6,6 & 2,3 & -1,9 \\ 39,7 & 36,3 & 32,6 & 28,8 & 24,8 & 20,7 & 16,7 & 12,6 & 8,5 & 4,6 & 0,8 \\ 37,8 & 34,9 & 32 & 29,1 & 26,1 & 23,1 & 20 & 17 & 13,9 & 10,9 & 7,8 \\ 36,5 & 34,1 & 32,1 & 30,3 & 28,6 & 27,1 & 25,5 & 24 & 22,3 & 20,4 & 18,4 \\ 37,9 & 35,5 & 34,1 & 33,3 & 33 & 33 & 33,1 & 33,1 & 32,9 & 32,4 & 31,3 \\ 45 & 41,4 & 39,7 & 39,3 & 39,9 & 41,1 & 42,5 & 43,9 & 44,9 & 45,4 & 45 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{31} = 45,372$.

Введем приближенные функции, в качестве которой будет функция $V_1(k, m, x, y)$, а в качестве проверочных функций возьмем многочлены Лежандра [78]:

$$V_1(k, m, x, y) = x^k \cdot (a - x) \cdot y^m \cdot (b - y). \quad (4.96)$$

Вычислим нормировочные коэффициенты при $(i = 1 \dots n_1, j = 1 \dots n_1)$:

$$VV_{i-1, j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i, j, x, y))^2 dx dy}. \quad (4.97)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, m, x, y) = \left(k + m \neq 0, \frac{V_1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right). \quad (4.98)$$

Введем проверочные функции:

$$P(k, t) = \left(k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right), \quad (4.99)$$

где $k = 1 \dots n_1, m = 1 \dots n_1$ и

$$W(k, m, x, y) = \frac{P\left(k-1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)}{\sqrt{\int_0^a \left(P\left(k-1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)\right)^2 dx}} \times \frac{P\left(m-1, \frac{2}{b} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)\right)}{\sqrt{\int_0^b \left(P\left(m-1, \frac{2}{b} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)\right)\right)^2 dy}}. \quad (4.100)$$

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (4.87) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (4.88), и, решая систему уравнений $A \cdot C = B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A = \begin{bmatrix} -3,321 & -3,039 & -2,773 & -3,505 & -3,452 & -3,289 & -4,51 & -4,4 & -4,171 \\ 1,304 & 0,652 & 0,225 & 1,346 & 0,945 & 0,454 & 1,736 & 1,173 & 0,548 \\ 2,073 & 2,429 & 2,528 & 2,245 & 2,477 & 2,828 & 2,879 & 3,202 & 3,612 \\ -4,342 & -5,299 & -5,592 & -9,287 & -9,706 & -9,546 & -12,65 & -12,652 & -12,159 \\ 1,537 & 2,247 & 1,473 & 3,494 & 3,094 & 1,703 & 4,831 & 3,616 & 1,813 \\ 3,021 & 2,707 & 4,174 & 6,08 & 6,365 & 7,861 & 8,148 & 8,871 & 10,335 \\ -11,444 & -14,927 & -16,162 & -23,231 & -25,609 & -25,85 & -35,764 & -36,568 & -35,559 \\ 3,931 & 6,932 & 4,736 & 8,571 & 9,137 & 5,441 & 13,557 & 11,061 & 5,835 \\ 8,187 & 6,796 & 11,632 & 15,52 & 15,452 & 20,537 & 23,224 & 24,798 & 29,743 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5,413 \\ 5,059 \\ -1,599 \\ 1,105 \\ 2,436 \\ -5,555 \\ -0,522 \\ 8,157 \\ -13,155 \end{bmatrix},$$

$$C = [-2,116 \quad 12,521 \quad -7,392 \quad 67,566 \quad -160,446 \quad 92,987 \quad -82,527 \quad 190,67 \quad -110,467].$$

Следовательно, приближенное решение $U(x, y)$ для $n_1=3$ равно:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (4.101)$$

Построим матрицу решений U_2 , разбив область D на 100 частей при ($i = 0 \dots 10, j = 0 \dots 10$):

$$U_{2i,j} = U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right). \quad (4.102)$$

Для сравнения получившихся точного и приближенного решений, найдем разность получившихся матриц при U_2 :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5,146 & 5,441 & 5,76 & 6,012 & 6,138 & 6,109 & 5,929 & 5,633 & 5,291 & 5 \\ 5 & 5,276 & 5,589 & 5,868 & 6,06 & 6,133 & 6,076 & 5,896 & 5,621 & 5,3 & 5 \\ 5 & 5,374 & 5,604 & 5,723 & 5,755 & 5,723 & 5,644 & 5,527 & 5,381 & 5,206 & 5 \\ 5 & 5,429 & 5,594 & 5,597 & 5,518 & 5,414 & 5,321 & 5,252 & 5,2 & 5,134 & 5 \\ 5 & 5,438 & 5,62 & 5,642 & 5,577 & 5,48 & 5,385 & 5,305 & 5,236 & 5,149 & 5 \\ 5 & 5,4 & 5,694 & 5,883 & 5,972 & 5,968 & 5,882 & 5,725 & 5,513 & 5,265 & 5 \\ 5 & 5,324 & 5,779 & 6,223 & 6,55 & 6,694 & 6,625 & 6,354 & 5,929 & 5,436 & 5 \\ 5 & 5,219 & 5,789 & 6,44 & 6,969 & 7,242 & 7,198 & 6,841 & 6,247 & 5,562 & 5 \\ 5 & 5,103 & 5,591 & 6,189 & 6,693 & 6,969 & 6,95 & 6,637 & 6,103 & 5,488 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,19 & -0,526 & -0,883 & -1,167 & -1,314 & -1,294 & -1,106 & -0,781 & -0,382 & 0 \\ 0 & -0,362 & -0,757 & -1,11 & -1,363 & -1,479 & -1,439 & -1,244 & -0,91 & -0,478 & 0 \\ 0 & -0,497 & -0,845 & -1,071 & -1,193 & -1,225 & -1,171 & -1,035 & -0,804 & -0,469 & 0 \\ 0 & -0,584 & -0,897 & -1,034 & -1,067 & -1,045 & -0,988 & -0,897 & -0,74 & -0,47 & 0 \\ 0 & -0,614 & -0,966 & -1,143 & -1,208 & -1,208 & -1,158 & -1,058 & -0,87 & -0,55 & 0 \\ 0 & -0,586 & -1,057 & -1,41 & -1,639 & -1,741 & -1,707 & -1,536 & -1,204 & -0,705 & 0 \\ 0 & -0,501 & -1,127 & -1,731 & -2,195 & -2,446 & -2,436 & -2,16 & -1,626 & -0,891 & 0 \\ 0 & -0,366 & -1,079 & -1,863 & -2,508 & -2,877 & -2,888 & -2,538 & -1,862 & -0,976 & 0 \\ 0 & -0,194 & -0,769 & -1,452 & -2,03 & -2,37 & -2,39 & -2,093 & -1,517 & -0,788 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{12} = 2,888$.

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (4.87) при $i_1=1 \dots n_1-1, j_1=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (4.88), и, решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,104 & 1,722 & 3,956 & 4,396 \\ 1,078 & 1,475 & 3,784 & 4,309 \\ 1,857 & 2,403 & 4,422 & 4,871 \\ 1,791 & 2,21 & 4,228 & 4,793 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -5,413 \\ 5,059 \\ 1,105 \\ 2,436 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [70,726 \quad -81,545 \quad 71,287 \quad -51,206].$$

Получим матрицу предыдущего для ($n_1=2$ приближенного решения, разбив область D на 100 частей. Используя формулу (4.92) и (4.93), построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$ при U_3 :

$$U_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 7,904 & 10,577 & 12,863 & 14,608 & 15,655 & 15,849 & 15,036 & 13,061 & 9,767 & 5 \\ 5 & 8,391 & 11,62 & 14,466 & 16,706 & 18,118 & 18,481 & 17,573 & 15,171 & 11,054 & 5 \\ 5 & 7,124 & 9,364 & 11,499 & 13,31 & 14,574 & 15,073 & 14,586 & 12,891 & 9,77 & 5 \\ 5 & 4,769 & 5,045 & 5,657 & 6,435 & 7,207 & 7,803 & 8,051 & 7,781 & 6,821 & 5 \\ 5 & 1,989 & -0,102 & -1,368 & -1,903 & -1,8 & -1,153 & -0,056 & 1,398 & 3,115 & 5 \\ 5 & -0,6 & -4,8 & -7,9 & -9,7 & -10,3 & -9,6 & -7,8 & -4,7 & -0,44 & 5 \\ 5 & -2,2 & -7,9 & -12,2 & -14,9 & -16 & -15,4 & -13,1 & -8,9 & -2,9 & 5 \\ 5 & -2,2 & -8,2 & -12,6 & -15,5 & -16,8 & -16,4 & -14 & -9,8 & -3,5 & 5 \\ 5 & -0,1 & -4,3 & -7,5 & -9,6 & -10,6 & -10,3 & -8,7 & -5,7 & -1,1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,8 & -5,1 & -7,1 & -8,6 & -9,5 & -9,7 & -9,1 & -7,427 & -4,5 & 0 \\ 0 & -3,1 & -6 & -8,6 & -10,7 & -12 & -12,5 & -11,7 & -9,55 & -5,8 & 0 \\ 0 & -1,8 & -3,8 & -5,8 & -7,6 & -8,9 & -9,4 & -9,06 & -7,511 & -4,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & 0,6 & -0,06 & -0,9 & -1,8 & -2,5 & -2,8 & -2,58 & -1,7 & 0 \\ 0 & 3,5 & 5,7 & 7,01 & 7,5 & 7,3 & 6,5 & 5,4 & 3,837 & 2,04 & 0 \\ 0 & 6 & 10,5 & 13,8 & 15,7 & 16,2 & 15,5 & 13,5 & 10,2 & 5,7 & 0 \\ 0 & 7,5 & 13,7 & 18,4 & 21,5 & 22,7 & 22,04 & 19,4 & 14,9 & 8,4 & 0 \\ 0 & 7,5 & 13,9 & 19,1 & 22,5 & 24,1 & 23,6 & 20,9 & 16,03 & 9,03 & 0 \\ 0 & 5,2 & 9,8 & 13,6 & 16,3 & 17,5 & 17,2 & 15,3 & 11,8 & 6,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{22} = 24,064$.

Найдем невязку получившегося приближенного решения, используя формулу (4.94). Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей используя формулу (4.95):

$$U_4 = \begin{bmatrix} 45 & 45,136 & 40,402 & 34,011 & 28,377 & 25,115 & 25,041 & 28,172 & 33,729 & 40,131 & 45 \\ 60,107 & 51,355 & 41,41 & 31,96 & 24,292 & 19,295 & 17,457 & 18,868 & 23,216 & 29,79 & 37,479 \\ 51,97 & 44,74 & 37,577 & 31,013 & 25,458 & 21,205 & 18,427 & 17,176 & 17,386 & 18,873 & 21,331 \\ 37,206 & 34,867 & 32,772 & 30,641 & 28,26 & 25,481 & 22,224 & 18,478 & 14,295 & 9,796 & 5,17 \\ 27,198 & 28,296 & 29,632 & 30,451 & 30,174 & 28,393 & 24,876 & 19,566 & 12,577 & 4,199 & -5,104 \\ 28,095 & 28,568 & 29,56 & 30,187 & 29,774 & 27,852 & 24,158 & 18,64 & 11,448 & 2,943 & -6,308 \\ 40,812 & 36,209 & 32,73 & 29,731 & 26,729 & 23,404 & 19,596 & 15,309 & 10,707 & 6,116 & 2,024 \\ 61,031 & 48,727 & 38,084 & 29,101 & 21,802 & 16,234 & 12,466 & 10,593 & 10,733 & 13,028 & 17,644 \\ 79,198 & 60,61 & 43,329 & 28,454 & 16,853 & 9,163 & 5,792 & 6,917 & 12,484 & 22,212 & 35,587 \\ 80,528 & 63,332 & 44,944 & 28,084 & 14,836 & 6,652 & 4,351 & 8,117 & 17,503 & 31,426 & 48,171 \\ 45 & 45,348 & 38,174 & 28,42 & 19,8 & 14,797 & 14,668 & 19,439 & 27,91 & 37,65 & 45 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{32} = 80,528$.

Введем приближенную функцию, в качестве которой будет функция $V_1(k, m, x, y)$, а в качестве проверочной функции возьмем из [78]:

$$V_1(k, m, x, y) = \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right). \quad (4.103)$$

Нормируем их

$$VV_{i-1, j-1} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V_1(i, j, x, y))^2 dx dy}. \quad (4.104)$$

Получим нормированные приближенные функции:

$$V(k, m, x, y) = \left(k + m \neq 0, \frac{V_1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right). \quad (4.105)$$

В качестве проверочных функций возьмем приближенные:

$$W(k, m, x, y) = V(k, m, x, y). \quad (4.106)$$

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (4.87) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (4.88) и решая систему уравнений $A \cdot C = B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A = \begin{bmatrix} -4,72 & -4,099 & 3,445 & 4,849 & 2,827 & -1,892 & 3,148 & 1,688 & -1,053 \\ -2,212 & -7,724 & -7,133 & 2,354 & 5,601 & 3,737 & 1,537 & 3,388 & 2,044 \\ 1,444 & -3,771 & -12,782 & -1,391 & 2,895 & 6,868 & -0,893 & 1,776 & 3,792 \\ 1,428 & 1,147 & -0,932 & -19,639 & -11,424 & 7,632 & 7,636 & 4,071 & -2,526 \\ 0,675 & 2,18 & 1,917 & -9,537 & -22,643 & -15,07 & 3,73 & 8,178 & 4,897 \\ -0,431 & 1,075 & 3,447 & 5,632 & -11,709 & -27,701 & -2,165 & 4,29 & 9,091 \\ 0,549 & 0,412 & -0,323 & 3,804 & 2,189 & -1,45 & -44,249 & -23,507 & 14,54 \\ 0,261 & 0,789 & 0,661 & 1,849 & 4,346 & 2,858 & -21,619 & -47,253 & -28,163 \\ -0,164 & 0,393 & 1,193 & -1,089 & 2,251 & 5,259 & 12,54 & -24,801 & -52,311 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4,315 \\ -2,634 \\ 0,423 \\ -1,276 \\ -1,19 \\ -0,512 \\ -0,783 \\ -0,694 \\ -0,259 \end{bmatrix},$$

$$C = [1,248 \quad -0,045 \quad 0,131 \quad 0,201 \quad -0,019 \quad 0,064 \quad 0,056 \quad -5,562 \cdot 10^{-3} \quad 0,021].$$

Следовательно, приближенное решение $U(x, y)$ для $n_1=3$ равно:

$$U(x, y) = V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} c_{k-1+n_1(m-1)} \cdot V(k, m, x, y). \quad (4.107)$$

Построим матрицу решений U_2 , разбив область D на 100 частей. Для сравнения получившихся точного и приближенного решений, найдем разность получившихся матриц при U_2 :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5,168 & 5,293 & 5,353 & 5,351 & 5,313 & 5,26 & 5,204 & 5,145 & 5,076 & 5 \\ 5 & 5,28 & 5,492 & 5,599 & 5,607 & 5,551 & 5,465 & 5,369 & 5,262 & 5,138 & 5 \\ 5 & 5,32 & 5,57 & 5,707 & 5,735 & 5,686 & 5,593 & 5,476 & 5,339 & 5,178 & 5 \\ 5 & 5,319 & 5,575 & 5,728 & 5,777 & 5,744 & 5,656 & 5,533 & 5,379 & 5,198 & 5 \\ 5 & 5,323 & 5,583 & 5,744 & 5,799 & 5,77 & 5,683 & 5,556 & 5,396 & 5,207 & 5 \\ 5 & 5,349 & 5,624 & 5,784 & 5,827 & 5,782 & 5,683 & 5,552 & 5,392 & 5,205 & 5 \\ 5 & 5,368 & 5,649 & 5,797 & 5,816 & 5,748 & 5,637 & 5,507 & 5,359 & 5,188 & 5 \\ 5 & 5,328 & 5,572 & 5,689 & 5,688 & 5,613 & 5,509 & 5,399 & 5,282 & 5,148 & 5 \\ 5 & 5,197 & 5,343 & 5,408 & 5,401 & 5,351 & 5,287 & 5,223 & 5,157 & 5,083 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,212 & -0,379 & -0,476 & -0,506 & -0,489 & -0,445 & -0,382 & -0,292 & -0,167 & 0 \\ 0 & -0,366 & -0,66 & -0,841 & -0,91 & -0,896 & -0,828 & -0,718 & -0,551 & -0,317 & 0 \\ 0 & -0,444 & -0,811 & -1,056 & -1,173 & -1,187 & -1,12 & -0,984 & -0,762 & -0,441 & 0 \\ 0 & -0,474 & -0,877 & -1,166 & -1,327 & -1,375 & -1,323 & -1,178 & -0,919 & -0,535 & 0 \\ 0 & -0,499 & -0,929 & -1,245 & -1,43 & -1,498 & -1,456 & -1,308 & -1,03 & -0,607 & 0 \\ 0 & -0,534 & -0,987 & -1,311 & -1,494 & -1,555 & -1,509 & -1,362 & -1,082 & -0,645 & 0 \\ 0 & -0,545 & -0,998 & -1,305 & -1,461 & -1,5 & -1,447 & -1,313 & -1,056 & -0,644 & 0 \\ 0 & -0,475 & -0,861 & -1,113 & -1,228 & -1,247 & -1,199 & -1,096 & -0,897 & -0,562 & 0 \\ 0 & -0,288 & -0,521 & -0,671 & -0,738 & -0,751 & -0,727 & -0,678 & -0,571 & -0,383 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{12}| = \varepsilon_{13} = 1,555$.

Далее найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов приближенных решений c_k при $i=1 \dots n_1-1, j=1 \dots n_1-1$. Используя формулу (4.87) при $i_l=1 \dots n_1-1, j_l=1 \dots n_1-1, i_2=1 \dots n_1-1, j_2=1 \dots n_1-1$.

Используя формулу (4.88) и решая систему уравнений $A_1 \cdot C_1 = B_1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4,72 & -4,099 & 4,849 & 2,827 \\ -2,212 & -7,724 & 2,354 & 5,601 \\ 1,428 & 1,147 & -19,639 & -11,424 \\ 0,675 & 2,18 & -9,537 & -22,643 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -4,315 \\ -2,634 \\ -1,276 \\ -1,19 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0,937 \ 0,141 \ 0,115 \ 0,046].$$

Получим матрицу предыдущего (для $n_1=2$) приближенного решения, разбив область D на 100 частей, используя формулу (4.92) и (4.93) построим матрицу сравнения полученных решений для $n_1=3$ и $n_1=2$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5,115 & 5,21 & 5,271 & 5,292 & 5,276 & 5,234 & 5,176 & 5,115 & 5,056 & 5 \\ 5 & 5,208 & 5,381 & 5,493 & 5,533 & 5,506 & 5,43 & 5,326 & 5,214 & 5,105 & 5 \\ 5 & 5,265 & 5,487 & 5,632 & 5,686 & 5,655 & 5,56 & 5,428 & 5,283 & 5,139 & 5 \\ 5 & 5,28 & 5,515 & 5,672 & 5,734 & 5,707 & 5,611 & 5,473 & 5,316 & 5,157 & 5 \\ 5 & 5,258 & 5,476 & 5,624 & 5,689 & 5,671 & 5,588 & 5,461 & 5,313 & 5,157 & 5 \\ 5 & 5,21 & 5,39 & 5,516 & 5,576 & 5,569 & 5,507 & 5,405 & 5,279 & 5,142 & 5 \\ 5 & 5,152 & 5,283 & 5,379 & 5,429 & 5,431 & 5,392 & 5,319 & 5,223 & 5,115 & 5 \\ 5 & 5,095 & 5,178 & 5,241 & 5,276 & 5,283 & 5,262 & 5,217 & 5,154 & 5,08 & 5 \\ 5 & 5,045 & 5,084 & 5,115 & 5,133 & 5,138 & 5,13 & 5,109 & 5,078 & 5,041 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,053 & 0,083 & 0,082 & 0,059 & 0,036 & 0,026 & 0,028 & 0,03 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0,072 & 0,111 & 0,106 & 0,074 & 0,044 & 0,036 & 0,043 & 0,048 & 0,033 & 0 \\ 0 & 0,055 & 0,083 & 0,076 & 0,05 & 0,031 & 0,033 & 0,049 & 0,056 & 0,038 & 0 \\ 0 & 0,039 & 0,059 & 0,056 & 0,043 & 0,036 & 0,045 & 0,06 & 0,063 & 0,041 & 0 \\ 0 & 0,065 & 0,107 & 0,119 & 0,11 & 0,099 & 0,095 & 0,094 & 0,083 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,139 & 0,234 & 0,268 & 0,251 & 0,213 & 0,176 & 0,146 & 0,113 & 0,063 & 0 \\ 0 & 0,216 & 0,366 & 0,418 & 0,388 & 0,316 & 0,245 & 0,188 & 0,135 & 0,074 & 0 \\ 0 & 0,233 & 0,394 & 0,449 & 0,412 & 0,33 & 0,247 & 0,183 & 0,128 & 0,068 & 0 \\ 0 & 0,153 & 0,258 & 0,293 & 0,268 & 0,213 & 0,157 & 0,114 & 0,079 & 0,042 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_{23}| = \varepsilon_{23} = 0,449$.

Найдем невязку полученного приближенного решения, используя формулу (4.94). Получим матрицу невязки приближенного решения, разбив область D на 100 частей, используя формулу (4.95):

$$U_4 = \begin{bmatrix} 45 & 45,114 & 45,198 & 45,238 & 45,235 & 45,208 & 45,172 & 45,135 & 45,095 & 45,05 & 45 \\ 45,44 & 41,201 & 38,075 & 36,562 & 36,188 & 35,94 & 35,031 & 33,384 & 31,513 & 29,962 & 28,816 \\ 45,732 & 38,806 & 33,554 & 30,742 & 29,669 & 28,825 & 27,028 & 24,158 & 20,977 & 18,292 & 16,224 \\ 45,833 & 38,205 & 32,099 & 28,237 & 26 & 24,024 & 21,237 & 17,525 & 13,575 & 10,114 & 7,241 \\ 45,827 & 38,567 & 32,383 & 27,819 & 24,46 & 21,352 & 17,738 & 13,536 & 9,227 & 5,317 & 1,859 \\ 45,835 & 38,696 & 32,483 & 27,685 & 23,954 & 20,47 & 16,58 & 12,211 & 7,778 & 3,715 & 0,062 \\ 45,905 & 38,078 & 31,577 & 27,058 & 23,997 & 21,209 & 17,757 & 13,539 & 9,153 & 5,229 & 1,842 \\ 45,959 & 37,368 & 30,717 & 26,917 & 25,17 & 23,728 & 21,218 & 17,494 & 13,43 & 9,959 & 7,213 \\ 45,858 & 37,876 & 32,015 & 29,241 & 28,668 & 28,388 & 26,901 & 24,046 & 20,775 & 18,105 & 16,197 \\ 45,518 & 40,486 & 36,882 & 35,35 & 35,297 & 35,438 & 34,767 & 33,172 & 31,288 & 29,794 & 28,8 \\ 45 & 44,866 & 44,768 & 44,725 & 44,731 & 44,766 & 44,81 & 44,853 & 44,896 & 44,945 & 45 \end{bmatrix}.$$

Отсюда максимальное значение $|U_4| = \varepsilon_{33} = 45,959$.

Выпишем полученные максимальные значения решений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1,631, & \varepsilon_{21} &= 0,675, & \varepsilon_{31} &= 45,372, \\ \varepsilon_{12} &= 2,888, & \varepsilon_{22} &= 24,064, & \varepsilon_{32} &= 80,528, \\ \varepsilon_{13} &= 1,555, & \varepsilon_{23} &= 0,449, & \varepsilon_{33} &= 45,959. \end{aligned}$$

На основании полученных результатов следует вывод о том, что первая система $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}$ приближенных и проверочных функций дает лучшее решение дифференциального уравнения. Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении Б, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [106].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, для примера используем полученные матрицы пространства состояний A, B, C для нахождения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами аналогично п.п. 2.4. Зададим матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,104 & 1,722 & 3,956 & 4,396 \\ 1,078 & 1,475 & 3,784 & 4,309 \\ 1,857 & 2,403 & 4,422 & 4,871 \\ 1,791 & 2,21 & 4,228 & 4,793 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -3,125 \\ -3,063 \\ -1,725 \\ -1,929 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [3,41 \quad -1,023 \quad 2,185 \quad -3,133].$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$\begin{aligned}
W(p) &= C(pI - A)^{-1}B = [3,41 \quad -1,023 \quad 2,185 \quad -3,133] \times \\
&\times \left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,104 & 1,722 & 3,956 & 4,396 \\ 1,078 & 1,475 & 3,784 & 4,309 \\ 1,857 & 2,403 & 4,422 & 4,871 \\ 1,791 & 2,21 & 4,228 & 4,793 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -3,125 \\ -3,063 \\ -1,725 \\ -1,929 \end{bmatrix} = \\
&= [3,41 \quad -1,023 \quad 2,185 \quad -3,133] \times \\
&\times \begin{bmatrix} p-1,104 & -1,722 & -3,956 & -4,396 \\ -1,078 & p-1,475 & -3,784 & -4,309 \\ -1,857 & -2,403 & p-4,422 & -4,871 \\ -1,791 & -2,21 & -4,228 & p-4,793 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3,125 \\ -3,063 \\ -1,725 \\ -1,929 \end{bmatrix} = \\
&= [3,41 \quad -1,023 \quad 2,185 \quad -3,133] \times \\
&\times \begin{bmatrix} \frac{2p^3 - 21,38p^2 - 8,9p + 0,6}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{3,4p^2 + 67p - 0,5}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{7,9p^2 + 0,6p - 0,4}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{8,8p^2 + 1,5p + 0,3}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} \\ \frac{0,2p^2 + 14068p + 301,5}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{2p^3 - 20,6p^2 - 14687p + 1391}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{7,6p^2 - 7,6p + 1,2}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{8,6p^2 - 10p - 1529}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} \\ \frac{3714p^2 - 23261,5p - 9100}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{4,8p^2 + 6388,7p + 5422}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{2p^3 - 14,7p^2 - 7,1p + 1,8}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{9,7p^2 + 16322p + 3469}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} \\ \frac{3,6p^2 + 15682p + 7888}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{4,4p^2 + 2p - 5424}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{8,5p^2 + 9p - 2}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} & \frac{2p^3 - 14p^2 - 14685p - 2524}{2p^4 - 23,6p^3 - 14694p^2 - 1129p + 804} \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} -3,125 \\ -3,063 \\ -1,725 \\ -1,929 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{10,4968p^3 + 25284p^2 + 110530p + 23440}{2p^4 + 23,6p^3 + 14694p^2 + 1129p + 804}.$$

Переходя к задаче синтеза технических систем модифицированным обобщенным методом Галеркина, которая предполагает известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{\text{п.п.}}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность). Устойчивость и грубость САУ должна обеспечиваться в соответствии с вариацией параметров системы.

Динамика системы описывается следующим уравнением движения:

$$\begin{aligned}
Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) + R(c_k, D)F[x(t), \dot{x}(t)] + \\
+ \bar{f}(c_k, D)F[x(t), \dot{x}(t)] = f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right).
\end{aligned} \tag{4.108}$$

В соответствии с п.п. 2.5, запишем желаемое программное движение для системы на рисунке 4.16:

$$x^0(t) = \left[x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \right] 1(t), \quad (4.109)$$

где $x_y = 0,18; H_1 = 0,19; \alpha = 0,6; \beta = 10 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,8 \text{ рад}$.

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\begin{aligned} \psi(c_k, t) = & Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) + R(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] + \\ & + \bar{f}(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] - f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Запишем алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\varphi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t) \cdot \varphi_q(t)dt + \\ & + \int_0^{\infty} R(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] \cdot \varphi_q(t)dt + \\ & + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] \cdot \varphi_q(t)dt - \\ & - \int_0^{\infty} f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) \cdot \varphi_q(t)dt = 0, \end{aligned} \quad (4.111)$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Относительной координаты входа нелинейного звена система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & p \cdot (T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1) \cdot (2p^4 + 23,6p^3 + 14694p^2 + 1129p + 804)x(t) + \\ & + K_3(K_1 + K_2 p)(10,4968p^3 + 25284p^2 + 110530p + 23440)x(t) + \\ & + K_3 p(10,4968p^3 + 25284p^2 + 110530p + 23440) \cdot F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] = \\ & = K_3 p(10,4968p^3 + 25284p^2 + 110530p + 23440)f(t). \end{aligned} \quad (4.112)$$

В ходе решения задачи синтеза необходимо, чтобы $K_1 > 0, T_1 > 0, K_2 > 0, T_2 > 0$, обеспечивали САУ при $T=0,2$ и внешнем скачкообразном воздействии $f(t)=1(t)$ переходной процесс с перерегулированием на уровне $\sigma \approx 35\%$ и время затухания $T_{п.п} \approx 5\text{с}$.

Получим график переходных процессов системы (рисунок 4.18) при заданных параметрах объекта управления $T_1 = 0,0019 \text{ с}; T_2 = 0,6 \text{ с}; K_3 = 260$.

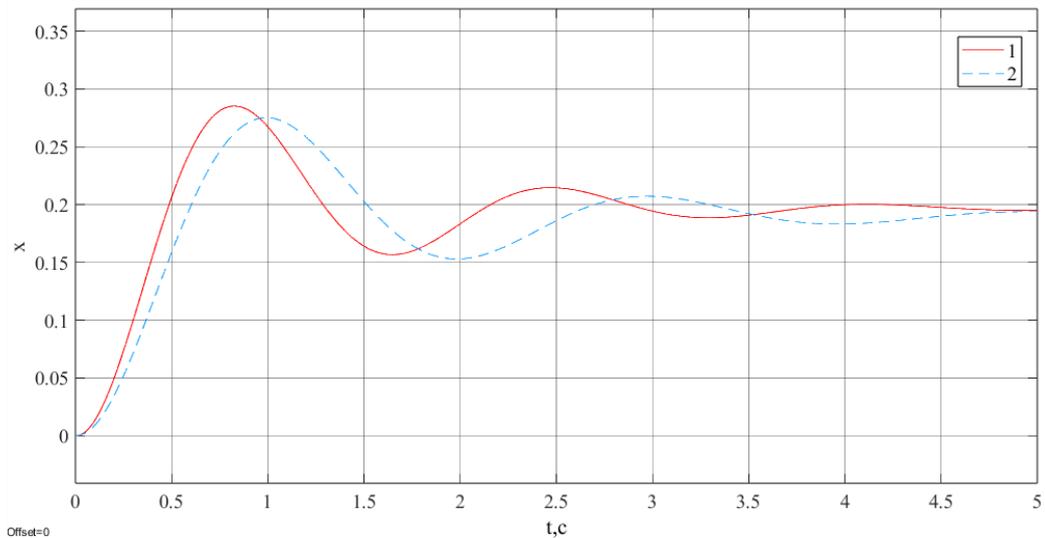


Рисунок 4.18 - График переходных процессов

где процесс 1 – желаемое программное движение [88], процесс 2 – переходной процесс, полученный в результате синтеза.

В результате решения поставленной задачи синтеза модифицированным обобщенным методом Галеркина, были получены следующие значения варьируемых параметров регулятора: $K_1=0,0306$; $K_2=0,105$; $K_3=0,000121$.

Полученный график переходного процесса показывает, что найденные параметры приблизительно обеспечивают заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме [108-111].

4.3 Решение прикладной задачи. Параметрический синтез системы управления давлением в тормозной системе

Используя модель системы управления давлением из [123-124], содержащую трубопроводную линию, состоящую из двух отрезков. Система является САУ с распределенными параметрами в следствии наличия нескольких отрезков.

На рисунке 4.19 представлена функциональная схема имитационной модели исполнительного элемента.

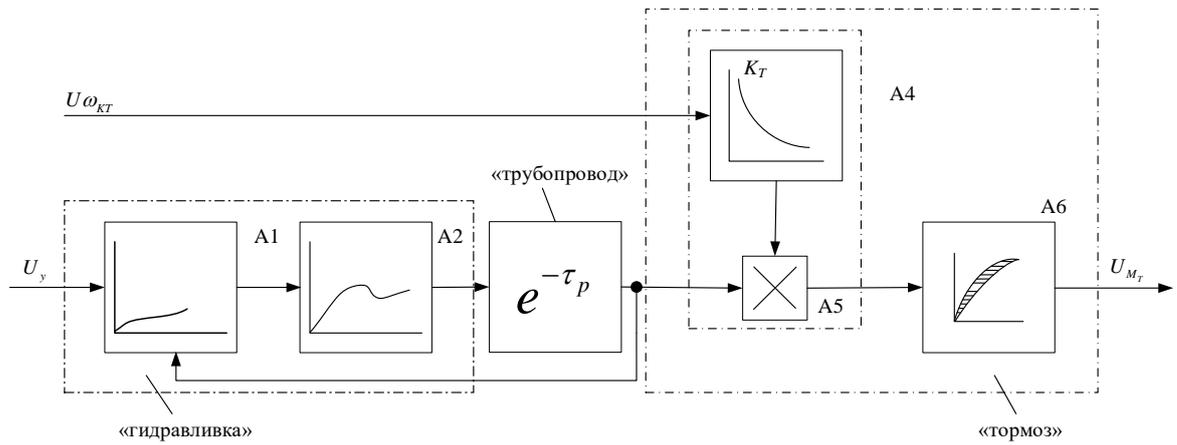


Рисунок 4.19 – Функциональная схема имитационной модели исполнительного элемента

Схема состоит из модели управляющей части гидравлической части $A1, A2$, включающая в себя модели наполнения тормоза $A1$, модели переходных процессов в следящей системе и гидроусилителя $A2$, модели запаздывания $A3$, включающие в себя общее «чистое» запаздывание в системе и модели тормоза $A4, A5, A6$ – модели зависимости коэффициента тормоза от скорости колеса и модели гистерезиса.

Рассмотрим структурную схему исполнительной части САУ торможения колес (рисунок 4.20),

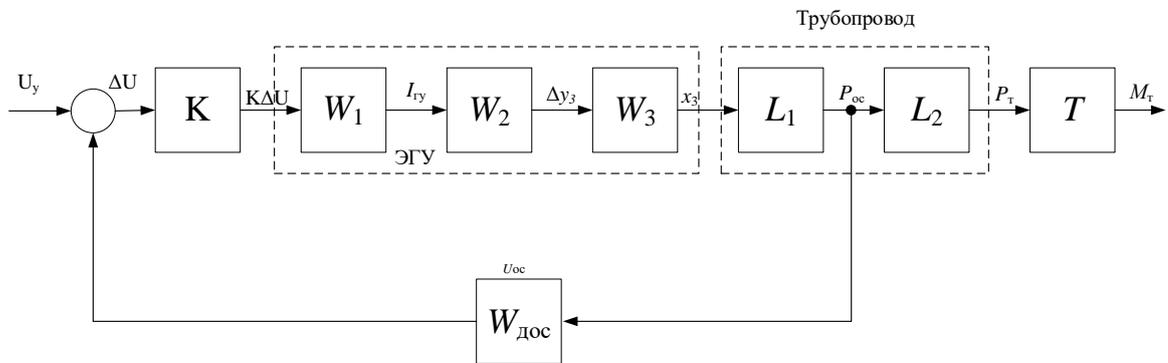


Рисунок 4.20 – Структурная схема исполнительной части САУ торможения колес

где в блоке K происходит усиление сигнала рассогласования. Уравнение блока K ; записывается следующим образом:

$$U_{\text{вых}} = K \Delta U, \tag{4.113}$$

где ΔU – сигнал рассогласования, $U_{\text{вых}}$ – выходной сигнал блока, K – коэффициент усиления. Необходимо отметить, что $U_{\text{вых}}$ имеет ограничение равное 10 В.

Блок W_1 – служит для преобразования усиленного сигнала рассогласования в постоянный ток обмоток управления гидроусилителем. Тогда

$$W_1(p) = \frac{I_{гy}(p)}{\Delta U} = \frac{K}{T_y(p) + 1}, \quad (4.114)$$

где $I_{гy}$ – ток обмоток управления гидроусилителя, T_y – постоянная времени преобразователя сигнала рассогласования в ток обмотки управления гидроусилителем:

$$T_y = \frac{L}{R}, \quad (4.115)$$

L – индуктивность обмоток управления гидроусилителя, R – сопротивление контура, по которому протекает ток, $R = R_u + R_{упр}$, R_u – сопротивление источника сигнала рассогласования, $R_{упр}$ – сопротивление обмоток управления гидроусилителем.

Блок W_2 служит для преобразования тока обмоток гидроусилителя в отклонение заслонки электромагнитной головки гидроусилителя. Магнитодвижущие силы подмагничивания $E_{пн}$ и управления $E_{упр}$ суммируясь в рабочих зазорах, создают движущее усилие на якоре электромагнита. При перемещении якоря тяговое усилие уравновешивается упругими силами пружины. При этом якорь и заслонка отклоняются на величину пропорциональную току управления:

$$H = R_h I_{гy}, \quad (4.116)$$

где h – перемещение якоря, приведенное к оси сопел; $R_h = \frac{\partial h}{\partial I_{гy}}$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров магнитной системы, числа витков обмотки гидроусилителя и жесткости упругого элемента.

Блок W_2 описывается передаточной функцией электромагнитной головки, которая записывается в виде колебательного звена:

$$W_2(s) = \frac{h(p)}{I_{гy}(p)} = \frac{R_2}{T_2^2 p^2 + \zeta_2 T_2 p + 1}, \quad (4.117)$$

где $T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2}}$ – электромеханическая постоянная времени; $\zeta_2 = \frac{B}{2\sqrt{c_2}}$ – коэффициент

относительного демпфирования; $R_2 = Rh$ – коэффициент передачи.

Блок W_3 предназначен для преобразования перемещения заслонки электромагнитной головки усилителя в перемещение золотника гидроусилителя. В нашем случае гидроусилитель представляет собой статический гидроусилитель, то есть золотник гидроусилителя подпружинен специальными пружинами. С целью линеаризации и упрощения движения гидроусилителя статического типа, примем следующие допущения: масса, сухое и вязкое трение золотника малы и ими можно пренебречь.

Передаточная функция гидроусилителя от перемещения к перемещению золотника представим в виде:

$$W_{xh}(p) = W_3(p) = \frac{x(p)}{h(p)} = \frac{R_{zy}}{T_{zy}p + 1}, \quad (4.118)$$

где $R_{zy} = \frac{\partial x}{\partial h} = R_{ph}R_{xy}$ – коэффициент передачи гидроусилителя, $L1$ и $L2$ входят в состав трубопровода, описание которого будет представлено ниже.

В тормозе происходит преобразование давления P_T в полости тормоза в перемещение и сжатие тормозных дисков, в результате которого возникает момент, при движении колес по поверхности.

Кинетическая энергия системы:

$$T = (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) \frac{1}{2}. \quad (4.119)$$

Датчик обратной связи (ДОС) предназначен для преобразования давления обратной связи в электрический сигнал U_{oc} постоянного тока, через который и замыкается СТК (система торможения колес). Передаточную функцию ДОС представим в виде:

$$W_{doc}(p) = \frac{K}{(Tp + 1)}, \quad (4.120)$$

где T – постоянная времени фильтра Φ , K – коэффициент усиления фильтра.

Постоянную времени фильтра запишем следующим образом:

$$T = R \cdot C, K = \frac{R_{oc}}{R}. \quad (4.120)$$

Трубопровод.

В нашем случае длина трубопроводной линии складывается из двух составных частей (L_1 и L_2), и общая длина линии составляет примерно 8 м. Следовательно, эту линию нужно рассматривать, как элемент с распределенными параметрами. Мгновенные отклонения давления и скорости среды (жидкости), а также скорость распространения возмущения по линии зависят от свойств среды, жесткости стенок и гидравлического сопротивления линии. Перечисленные факторы находят отражение в операторном коэффициенте распространения. Он является важной величиной, характеризующей динамические особенности линии с распределенными параметрами, и определяется по формуле:

$$V(p) = \pm \sqrt{\frac{p}{B_{mp}} \left[\rho_0 p + \frac{2W\tau v(p)}{r_0} \right]}. \quad (4.121)$$

Знак в формуле принимается положительный, если возмущение распространяется в положительном направлении. Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении, берется знак «минус»:

$$B_{mp} = \frac{B}{1 + \frac{2r_0 B}{\delta E_{cm}}}, \quad (4.122)$$

B – модуль объемной упругости жидкости, r_0 – радиус проходного сечения трубы, E_{cm} – модуль упругости стенок трубы, δ – толщина стенок трубопровода, ρ_0 – плотность жидкости.

Передаточная функция для касательного напряжения на стенке трубы:

$$W_{\tau v}(p) = \frac{j\rho p j_1 \left(jr_0 \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{v}} j_2 \left(jr_0 \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}, \quad (4.123)$$

где j_1 – функция Бесселя первого рода, первого порядка; j_2 – функция Бесселя второго рода, второго порядка; ν – кинематическая вязкость жидкости; p – переменная в преобразовании Лапласа; j – мнимая единица; ρ – плотность среды.

Операторный коэффициент распространения непосредственно связан с операторным волновым сопротивлением

$$\nu(p) = \frac{pZ_B(p)}{B_{mp}}. \quad (4.124)$$

При определении частотных характеристик линии вместо p подставляется $j\omega$. В этом случае коэффициент распространения принимает комплексную форму

$$\nu(j\omega) = \pm(\delta_3 + j\varepsilon_\phi). \quad (4.125)$$

Входящие в это соотношение величины δ_3 и ε_ϕ называют соответственно коэффициентом затухания и коэффициентом фазы. Коэффициент затухания характеризует уменьшение по длине амплитуды давления или амплитуды скорости среды в волне возмущения, распространяющегося по линии с фазовой скоростью C_n :

$$C_n = \frac{\omega}{\varepsilon}, \quad (4.126)$$

где ω – круговая частота,

$$\delta_3 = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{K_2}{2K_1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{K_2^2}} - 1 \right)}, \quad \varepsilon_\phi = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{K_2}{2K_1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{K_2^2}} + 1 \right)}, \quad (4.127)$$

где $\varepsilon_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{B_{mp}}}$, K_1 и K_2 – коэффициенты.

Для определения комплексного волнового сопротивления линии $Z_B(j\omega)$ подставим $p=j\omega$ в формулу (4.124) и приравняем полученное выражение к положительному значению комплексного коэффициента распространения (4.125). Исключив затем с помощью формулы величины δ_3 и ε_ϕ , после алгебраических преобразований найдем:

$$Z_B(j\omega) = Z_{B_0} \sqrt{\frac{K_2}{K_1} - \frac{j}{K_1}}, \quad (4.128)$$

где $Z_{B_0} = \sqrt{\rho_0 B_{mp}}$ – волновое сопротивление невязкой среды.

Если гидравлическое сопротивление принимать квазистационарным и не учитывать неравномерность распределения скоростей, как это сделано в [125], то

$$K_1 = K_2 = \frac{\omega \cdot r_0}{8\nu}. \quad (4.129)$$

Для безразмерной величины $\bar{\omega} > \omega$ можно записать:

$$\delta_3 = \frac{4\nu\chi_a}{r_0^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_\rho\beta B_{mp}}}, \quad \varepsilon_\phi = \omega \sqrt{\frac{\chi_\rho\beta\rho_0}{B_{mp}}}, \quad (4.130)$$

где $\chi_a, \chi_\rho\beta$ – коэффициенты,

$$\chi_a \approx \left(\frac{r_0}{4}\right) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + 0.4, \quad \chi_\rho\beta \approx 1. \quad (4.131)$$

Соотношение (4.130) указывает на увеличение коэффициента затухания с увеличением коррективы χ_a и с уменьшением корректив $\chi_\rho\beta$.

Такое изменение этих корректив соответствует увеличению безразмерной частоты, и, следовательно, высокочастотные колебания должны затухать по длине линии интенсивнее, чем низкочастотные.

При $\bar{\omega} > 300$ корректив χ_a можно вычислить:

$$\chi_a = \left(\frac{r_0}{4}\right) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, \quad (4.132)$$

здесь корректив $\chi_\rho\beta \approx 1$.

Тогда

$$Z_B(j\bar{\omega}) = Z_{B_0} \sqrt{1 - j \sqrt{\frac{2\nu}{\omega r_0^2}}}. \quad (4.133)$$

Динамические характеристики однородной линии круглого сечения с упругими стенками при движении вязкой сжимаемой среды можно определить с помощью следующих выражений:

$$\left[\rho_0 p + \frac{2W\tau\nu(p)}{r_0} \right] V(p) = -\frac{d\rho(p)}{d\chi}, \quad (4.134)$$

$$B_{mp} \frac{dV(p)}{d\chi} = -p\rho(p). \quad (4.135)$$

Решение данной системы уравнений позволяет найти для выбранного сечения линии мгновенные отклонения от установившихся значений средних по сечению давления и скорости среды. Каждая из этих величин будет представлять собой сумму одноименных с ней величин, определяемых во фронте возмущения, распространяющегося по линии в прямом и в обратном направлениях. Как уже указывалось выше, мгновенные отклонения давления и скорости среды, а также скорость распространения возмущения по линии зависят от свойств среды, жесткости стенок и гидравлического сопротивления линии.

Продифференцировав уравнение (4.134) по x , исключив затем с помощью уравнения (4.135) производную $\frac{dV(p)}{dx}$ и применив соотношение (4.121), получим:

$$\frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial x^2} - V^2(p)\rho(p) = 0. \quad (4.136)$$

Это уравнение имеет решение:

$$\rho(p, x) = C_1 e^{V(p)x} + C_2 e^{-V(p)x}. \quad (4.137)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются граничными условиями. Пусть при $x=0$:

$$\rho(p, x) = \rho_1(p, 0), \quad (4.138)$$

$$\frac{\partial \rho(p, x)}{\partial x} = -\frac{V^2(p)B_{mp}}{p} V_1(p, 0). \quad (4.139)$$

При граничных условиях:

$$C_1 = \frac{\rho_1(p, 0)}{2} - \frac{V(p)B_{mp}}{2s} V_1(p, 0), \quad C_2 = \frac{\rho_1(p, 0)}{2} + \frac{V(p)B_{mp}}{2p} V_1(p, 0). \quad (4.140)$$

После постановки C_1 и C_2 в уравнение (4.138) имеем:

$$\rho(p, x) = \frac{\rho_1(p, 0)}{2} (e^{V(p)x} + e^{-V(p)x}) - \frac{V(p)B_{mp}}{2p} V_1(p, 0) (e^{V(p)x} - e^{-V(p)x}) \quad (4.141)$$

или введением гиперболических функций в виде:

$$\rho(p, x) = \rho_1(p, 0)ch[V(p)x] - \frac{V(p)B_{mp}}{s} V_1(p, 0)sh[V(p)x]. \quad (4.142)$$

Решив систему уравнений (4.134) и (4.135) относительно $V(p, x)$ получим:

$$V(p, x) = V_1(p, 0)ch[V(p)x] - \frac{p}{V(p)B_{mp}} \rho_1(p, 0)sh[V(p)x]. \quad (4.143)$$

Примем длину линии равной L и обозначим по Лапласу давление и скорость среды в концевом сечении линии $x=L$ соответственно $\rho_2(p, L)$ и $V_2(p, L)$. Тогда при $x=L$ уравнения (4.19) и (4.20) примут вид:

$$\rho_2(p, L) \cdot \rho_1(p, 0)ch[V(p)L] - \frac{V(p)B_{mp}}{p} V_1(p, 0)sh[V(p)L], \quad (4.144)$$

$$V_2(p, L) = V_1(p, 0)ch[V(p)L] - \frac{p}{V(p)B_{mp}} \rho_1(p, 0)sh[V(p)L]. \quad (4.145)$$

При согласованной нагрузке от конца линии не отражаются волны возмущений, распространяющихся по линии, так как подключенное устройство пропускает точно тот расход среды, который переносится прямой волной. Вследствие этого на нагруженном конце линии не меняется скорость движения среды, и, следовательно, не меняется давление в концевом сечении.

Частотные характеристики линии с согласованной нагрузкой можно найти по передаточной функции, представляющей собой отношение изображений по Лапласу давлений в выходном и входном сечениях. Исключив из уравнений (4.144) и (4.145) величины $V_1(p, 0)$, $V_2(p, 0)$ и выключив обычно применяемые при определении передаточных функций, заменив гиперболические функции экспоненциальными, получим:

$$\frac{\rho_2(p, L)}{\rho_1(p, 0)} = e^{-V(p)L}. \quad (4.146)$$

При $p=j\omega$ и используя уравнение (4.125), которое учитывает комплексную форму коэффициента распространения передаточная функция (4.146) превращается в амплитудно-фазовую частотную функцию:

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_1(j\omega, 0)} = e^{-(\delta_3 + j\varepsilon_\phi)L}. \quad (4.147)$$

Если учесть выражение (4.125), то

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_2(j\omega, 0)} = e^{-\delta_3 L} e^{-j\omega \frac{L}{C_n}}, \quad (4.148)$$

где $\frac{L}{C_n}$ – время распространения волны возмущения от входного сечения линии.

Фазу линии φ_n можно вычислить по формуле:

$$\varphi_n = \frac{-\omega L}{C_n}. \quad (4.149)$$

Если пренебречь вязкостью рабочей среды, то коэффициент затухания δ_3 обратится в ноль и амплитудно-фазовая частотная характеристика линии будет такой, как у звена чистого запаздывания, то есть амплитуда не будет зависеть от частоты. Можно пренебречь уменьшением амплитуды при увеличении частоты. При несогласованной нагрузке на частотные характеристики линии существенно влияют концевые сопротивления (концевые импедансы).

Рассмотрим схему соединения сопротивлений гидравлической линии (рисунок 4.21), где $Z_1(p)$ входное сопротивление линии в сечении 1-1. P_1 и Q_1 давления и расход в этом же сечении. $Z_2(p)$ выходное сопротивление линии в сечении 2-2. P_2 и Q_2 давление и расход в концевом сечении.

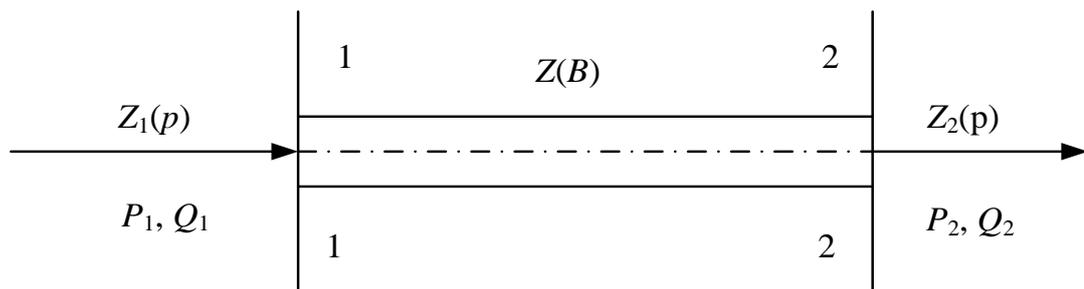


Рисунок 4.21 – Схема соединений сопротивлений гидравлической линии

Амплитудно-фазовую частотную характеристику линии с несогласованной нагрузкой при известном концевом комплексном сопротивлении $Z_2(j\omega)$ можно найти следующим образом:

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_1(j\omega, 0)} = \frac{1}{\frac{Z'_B(j\omega)}{Z_2(j\omega)} \operatorname{sh}(\delta + j\varepsilon)L + \operatorname{ch}(\delta + j\varepsilon)L}, \quad (4.150)$$

где

$$Z_2(j\omega) = Z'_B(j\omega) \frac{\frac{Z_1(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} \operatorname{ch}[V(j\omega)L] - \operatorname{sh}[V(j\omega)L]}{\operatorname{ch}[V(j\omega)L] - \frac{Z_1(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} \operatorname{sh}[V(j\omega)L]},$$

$$Z'_B(j\omega) = \frac{Z_B(j\omega)}{\pi r_0^2}, \quad (4.151)$$

$$Z_1(j\omega) = Z'_B(j\omega) \frac{\operatorname{sh}[V(j\omega)L] + \frac{Z_2(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} \operatorname{ch}[V(j\omega)L]}{\frac{Z_2(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} \operatorname{sh}[V(j\omega)L] + \operatorname{ch}[V(j\omega)L]}.$$

По аналогии с электрическими линиями представим комплексное сопротивление в виде:

$$Z_2(j\omega) = R_{ак} + jR_{рк}, \quad (4.151)$$

где $R_{ак}$ и $R_{рк}$ – соответственно активное и реактивное сопротивления нагрузки.

Комплексное волновое сопротивление линии $Z'_B(j\omega)$ с помощью (4.124), (4.125) и (4.151) запишется:

$$Z'_B(j\omega) = \frac{B_{mp}}{\pi r_0^2 \omega} (\varepsilon - i\delta). \quad (4.152)$$

Тогда можно записать:

$$\frac{Z'_B(j\omega)}{r_2(j\omega)} = M + jN, \quad (4.153)$$

где

$$M = \frac{B_{mp} (R_{ак} \varepsilon_\phi - \delta_3 R_{рк})}{\pi r_0^2 \omega (R_{ак}^2 + R_{рк}^2)}, \quad N = \frac{B_{mp} (R_{рк} \varepsilon_\phi + \delta_3 R_{ак})}{\pi r_0^2 \omega (R_{ак}^2 + R_{рк}^2)}. \quad (4.154)$$

Заменим в уравнении (4.150) отношение $\frac{Z'_B(j\omega)}{Z_2(j\omega)}$ его комплексным значением и применив формулу преобразования гиперболических и тригонометрических функций, получим:

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_1(j\omega, L)} = \frac{2}{M_1 + jN_1}, \quad (4.155)$$

$$M_1 = \left[(1+M)e^{\delta_3 L} + (1-M)e^{-\delta_3 L} \right] \cos \varepsilon_\phi L - N(e^{\delta_3 L} + e^{-\delta_3 L}) \sin \varepsilon_\phi L, \quad (4.156)$$

$$N_1 = \left[(1+M)e^{\delta_3 L} - (1-M)e^{-\delta_3 L} \right] \sin \varepsilon_\phi L + N(e^{\delta_3 L} - e^{-\delta_3 L}) \cos \varepsilon_\phi L.$$

Амплитудную $Ap_2p_1(\omega)$ и фазовую $\varphi p_2p_1(\omega)$ частотные характеристики находим по зависимости (4.155) в обычном виде:

$$Ap_2p_1(\omega) = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}}, \quad (4.157)$$

$$\varphi p_2p_1(\omega) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{N_1}{M_1} \right). \quad (4.158)$$

Величины M_1 и N_1 , входящие в амплитудную (4.157) и фазовую (4.158) частотные характеристики, являются, как показывает (4.156) функциями частоты колебаний, параметров линии и нагрузки. Для того, чтобы определить амплитуду и фазу давления обратной связи необходимо вместо L в формулах (4.156) поставить величину линии L_1 , а результат M_1 и N_1 подставить в выражение (4.157) и (4.158).

Для определения амплитуды и фазы давления на входе в тормоз P_T следует проделать те же операции, но вместо L_1 подставить L_1+L_2 .

Решая задачу диссертации и реализуя переход от дифференциальных гиперболических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью программы для ЭВМ [126], с помощью метода разделения переменных (Фурье) получим матрицы пространства состояний A, B и C объекта управления.

Необходимо в двумерной области:

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1\}, \quad (4.159)$$

решить дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.160)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}U + \gamma(x,t) \cdot \frac{d}{dt}U - K_1(x,t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K_2(x,t) \frac{d}{dx}U - \\ - \beta(x,t) \cdot U = g(x,t). \end{aligned} \quad (4.161)$$

с учетом граничных условий: $u(0,t) = 1$, $u(\pi,t) = 2$, или

$$a_0 \cdot U(a,t) + a_1 \cdot \frac{d}{dx}U(a,t) = a_2(t), \quad b_0 \cdot U(b,t) + b_1 \cdot \frac{d}{dx}U(b,t) = b_2(t). \quad (4.162)$$

В случае, если значения функций γ , K_1 , K_2 , β , g , a_2 , b_2 не зависят от значения времени t . Необходимо задать $\gamma(x)$, $K_1(x)$, ($K_1 > 0$), $K_2(x)$, $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$, $\phi(x)$ и численные значения параметров:

$$\begin{aligned} c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 1, \gamma(x) = 0, K_1(x) = c_1, K_1(x) = 0, \beta(x) = 0, g(x) = 0, \\ a = 0, b = \pi, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = c_2, b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = c_3, \phi(x) = 0, \end{aligned}$$

и функцию:

$$f(x) = c_4 \cdot x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 \cdot b^2}{b} x + c_2. \quad (4.163)$$

Например, для наглядности введем конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование: $T=1$ с.

Следующим этапом алгоритма является получение точного решения $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x)=0$, $\gamma(x)=0$, $g(x)=0$, $K_2(x)=0$, $K_1(x)=c_1=const$, то используя метод разделения переменных [98] получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} U(x,t) = U_0(x) + \\ + \sum_{k=1}^M \left(A_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t \right) + B_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t \right) \right) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right). \end{aligned} \quad (4.164)$$

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=18$ точность составляет 0.001, для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=30$.

При $a_1 = 0, b_1 = 0$ функция примет следующий вид:

$$U_0(x) = \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) \cdot x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)}. \quad (4.165)$$

Далее необходимо вычислить значения коэффициентов:

$$A_{2_{i-1}} = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx, \quad (4.166)$$

$$B_{2_{i-1}} = \frac{2}{\pi \cdot i} \cdot \int_a^b (\phi(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx. \quad (4.167)$$

В этом случае получим точное решение $U(x, t)$ вида:

$$UT(x, t) = U_0(x) + \sum_{k=1}^M \left(A_{2_{k-1}} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t\right) + B_{2_{k-1}} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t\right) \right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x\right). \quad (4.168)$$

Далее необходимо задать порядок приближенного решения вида:

$$U_n = V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) H(k, t), \quad (4.169)$$

которое представляет собой количество решений $n=4$, при $k=1 \dots n$, система приближенных решений:

$$V_0(k, x) = (x-a)^k \cdot (x-b). \quad (4.170)$$

Далее необходимо нормировать их при $i=1 \dots n$, с помощью нормировочных коэффициентов:

$$VV_{i-1} = \sqrt{\int_a^b (V_0(i, x))^2 dx}. \quad (4.171)$$

После чего получаем нормированные приближенные решения:

$$V(k, x) = \left[k \neq 0, \frac{V_0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right]. \quad (4.172)$$

Далее определим значения первых двух производных нормированного приближенного решения:

$$V_1(k, x) = \left[k \neq 0, \frac{(x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right], \quad (4.173)$$

$$V_2(k, x) = \left[k \neq 0 \left[k \neq 1, \frac{2 \cdot k \cdot (x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x-a)^{k-2}}{VV_{k-1}}, \frac{2}{VV_{k-1}} \right], 0 \right]. \quad (4.174)$$

Далее введем систему приближенных функций $W(k, x) = V(k, x)$. Зададим дифференциальное уравнение в матричном виде:

$$A \cdot \frac{d^2}{dt^2} H = M \cdot \frac{d}{dt} H + C \cdot H + B, \quad (4.175)$$

для нахождения функции $H_k(t)$ при нулевых начальных условиях:

$$A \cdot H(0) = D_1, A \cdot \frac{d}{dt} H(0) = N_1, \quad (4.176)$$

при $i=1 \dots n, j=1 \dots n$:

$$A_{i-1, j-1} = \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx, \quad (4.177)$$

$$M_{i-1, j-1} = - \int_a^b \gamma(x) \cdot V(j, x) \cdot W(i, x) dx, \quad (4.178)$$

$$C_{i-1, j-1} = \int_a^b (K_1(x) \cdot V_2(j, x) + K_2(x) \cdot V_1(j, x) + \beta(x) \cdot W(i, x)) dx, \quad (4.179)$$

$$B_{i-1} = \int_a^b ((K_1(x) \cdot V_2(0, x) + K_2(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \times \\ \times W(i, x) dx, \quad (4.180)$$

$$D_{1 i-1} = \int_a^b (f(x) \cdot V(0, x)) \cdot W(i, x) dx, \quad (4.181)$$

$$N_{1 i-1} = \int_a^b \phi(x) \cdot W(i, x) dx. \quad (4.182)$$

Зададим матричную систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\frac{d^2}{dt^2} H = M_1 \cdot \frac{d}{dt} H + C_1 \cdot H + B_1, \quad (4.183)$$

при нулевых начальных условиях:

$$H(0) = D_2, \frac{d}{dt} H(0) = N_2, \quad (4.184)$$

тогда $M_1 = A^{-1} \cdot M, C_1 = A^{-1} \cdot C, B_1 = A^{-1} \cdot B, D_2 = A^{-1} \cdot D_1, N_2 = A^{-1} \cdot N_1$.

Запишем в стандартном виде систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}H = AA \cdot H + BB, \quad (4.185)$$

при начальных условиях в матричном виде:

$$\begin{aligned} H(0) &= D_2, \quad D_{2_{n+i-1}} = N_{2_{i-1}}, \\ AA_{i-1, j-1} &= 0, \quad AA_{n+i-1, n+j-1} = M_{1_{i-1, j-1}}, \quad AA_{n+i-1, j-1} = C_{1_{i-1, j-1}}, \\ BB_{n+i-1} &= B_{i-1}, \quad BB_{i-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.186)$$

Далее необходимо найти значения коэффициентов матричной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dH}{dt} = AA \cdot H + BB, \quad (4.187)$$

при

$$\begin{aligned} H &= D_2, \\ D(t, H) &= AA \cdot H + BB. \end{aligned} \quad (4.188)$$

Получим значения коэффициентов методом Рунге-Кутты $Y = (H, 0, T, 100, D)$ при $k=1 \dots n$, тогда

$$\begin{aligned} Y_{100, k} &= \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}, \quad AA = \begin{bmatrix} -2,837 & 7,582 & 7,048 & 9,878 \\ 4,549 & -26,749 & -28,254 & -48,398 \\ -2,937 & 36,102 & 47,418 & 88,611 \\ 3,411 \cdot 10^{-13} & -18,479 & -28,628 & -53,498 \end{bmatrix}, \\ H &= (3,194 \quad -9,095 \cdot 10^{-13} \quad 1,819 \cdot 10^{-12} \quad -9,095 \cdot 10^{-13}). \end{aligned}$$

Тогда решение примет вид:

$$U(x, 1) = U_0(x) + 0,761U_1(x) + 2,39U_2(x) - 1,543U_3(x) - 4,483 \cdot 10^{-13}U_4(x).$$

Приближенное решение при $n=4$ и $t=T$ принимает вид:

$$U(x) = V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100, k}. \quad (4.189)$$

Получим первое значение системы уравнений приближенных тригонометрических функций ε_{11} , заданных $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$: $\varepsilon_{11} = 0,019$.

Найдем предыдущее решение функции $U(x)$ при $n=4$:

$$UP(x) = V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100, k}, \quad (4.190)$$

получим решение: $\varepsilon_{21} = 0,032$.

Далее найдем невязку, полученного приближенного решения:

$$\begin{aligned} R_1(x) = & \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \left[\sum_{z=1}^n (M_{1\ k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z} + C_{1\ k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z}) + B_{1\ k-1} \right] \right] - \\ & - \gamma(x) \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n (M_{1\ k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z}) \right] - \\ & - \sum_{k=1}^n [K_1(x) \cdot V_2(k, x) + K_2(x) \cdot V_1(k, x) + \beta(x) \cdot V(k, x)] \times \\ & \times Y_{100, k} - (K_1(x) \cdot V_2(0, x) + K_2(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \end{aligned} \quad (4.191)$$

и определим значение: $\varepsilon_{31} = 3,545 \cdot 10^6$.

Определим невязки $R_2(x), R_3(x)$:

$$\begin{aligned} R_2(x) = & V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D_{2\ k-1} \cdot V(k, x), \quad R_3(x) = \\ & = -\phi(x) + \sum_{k=1}^n N_{2\ k-1} \cdot V(k, x), \end{aligned} \quad (4.192)$$

тогда $\varepsilon_{41} = 3,887 \cdot 10^{-11}$, $\varepsilon_{51} = 0$.

Далее аналогичным методом, с помощью программы для ЭВМ [121], для примера найдем значения трех таких приближенных решений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = 0,019, \quad \varepsilon_{21} = 0,032, \quad \varepsilon_{31} = 3,545 \cdot 10^6, \quad \varepsilon_{41} = 3,887 \cdot 10^{-11}, \quad \varepsilon_{51} = 0, \\ \varepsilon_{12} = 0,025, \quad \varepsilon_{22} = 0,053, \quad \varepsilon_{32} = 1,341, \quad \varepsilon_{42} = 4,263 \cdot 10^{-14}, \quad \varepsilon_{52} = 0, \\ \varepsilon_{13} = 20,237, \quad \varepsilon_{23} = 14,152, \quad \varepsilon_{33} = 1,137 \cdot 10^{-12}, \quad \varepsilon_{43} = 4,852 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{53} = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует вывод о том, что первая система приближенных и проверочных тригонометрических функций имеет наименьшие значения, а значит решение полученного дифференциального уравнения является наиболее точным.

Блок-схема изложенного алгоритма представлена в приложении А, результаты расчета получены с помощью зарегистрированного программного продукта [126].

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A , B , C для нахождения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами.

Зададим матрицы:

$$AA = A = \begin{bmatrix} -2,837 & 7,582 & 7,048 & 9,878 \\ 4,549 & -26,749 & -28,254 & -48,398 \\ -2,937 & 36,102 & 47,418 & 88,611 \\ 3,411 \cdot 10^{-13} & -18,479 & -28,628 & -53,498 \end{bmatrix}, Y_{100,k} = B = \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix},$$

$$H = C = (3,194 \quad -9,095 \cdot 10^{-13} \quad 1,819 \cdot 10^{-12} \quad -9,095 \cdot 10^{-13}).$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3,194 & -9,095 \cdot 10^{-13} & 1,819 \cdot 10^{-12} & -9,095 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2,837 & 7,582 & 7,048 & 9,878 \\ 4,549 & -26,749 & -28,254 & -48,398 \\ -2,937 & 36,102 & 47,418 & 88,611 \\ 3,411 \cdot 10^{-13} & -18,479 & -28,628 & -53,498 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3,194 & -9,095 \cdot 10^{-13} & 1,819 \cdot 10^{-12} & -9,095 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} p + 2,837 & -7,582 & -7,048 & -9,78 \\ -4,549 & p + 26,749 & 28,254 & 48,398 \\ 2,937 & -36,102 & p - 47,418 & -88,611 \\ -3,411 \cdot 10^{-13} & 18,479 & 28,628 & p + 53,498 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3,194 & -9,095 \cdot 10^{-13} & 1,819 \cdot 10^{-12} & -9,095 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \times$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0,06p^3 + 2p^2 + 18,4p + 36,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,5p^2 + 7,3p + 33,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,4p^2 + 4,3p + 26,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,6p^2 + 3,4p + 21,9}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \\ \frac{0,3p^2 + 6,9p + 24,8}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,06p^3 + 0,6p^2 + 2,7p + 18,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-1,8p^2 - 10,9p + 4,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-3p^2 - 19,2 - 0,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \\ \frac{-0,236p^2 - 8,9p - 31,9}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{2,3p^2 + 23,1p + 10,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,6p^3 + 5,2p^2 + 46,6p + 31,7}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{5,6p^2 + 53,2p + 40,2}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \\ \frac{0,001p + 0,008}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-1,2p^2 - 13,1p + 12}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-1,8p^2 - 20,3p - 18,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,06p^3 - 0,1p^2 - 20p - 18,9}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}.$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{0,15p^3 + 6,7p^2 + 79,3p + 214,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3}.$$

Переходя к задаче синтеза технических систем обобщенным методом Галеркина, которая предполагает известную структуру и параметры синтезируемой САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{п.п.}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность).

Используя схему на рисунке 4.20 рассмотрим объект управления как блок с распределенными параметрами, как показано на рисунке 4.22.

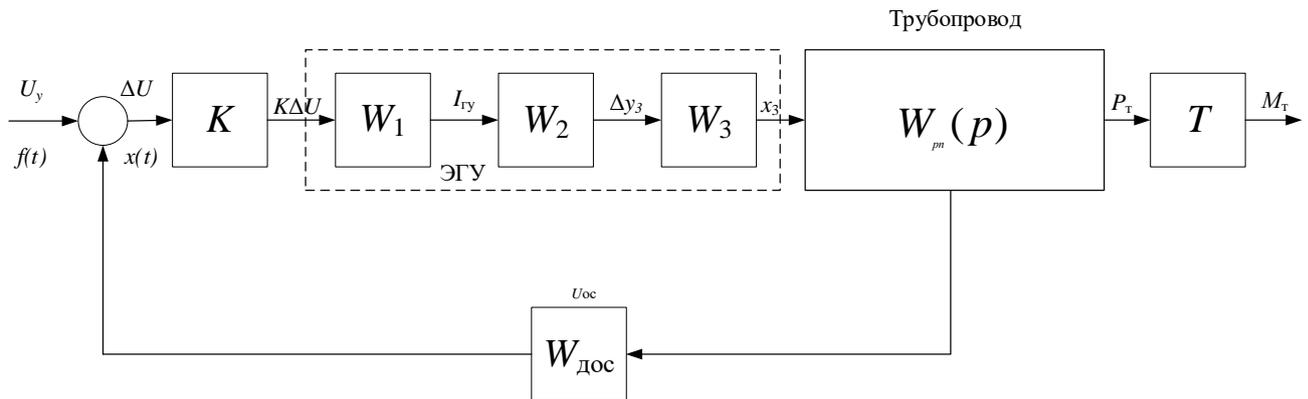


Рисунок 4.22– Структурная схема исполнительной части САУ торможением колес

В схеме использованы следующие параметры:

$$K = \frac{1}{21,5}, W_1 = \frac{1}{0,005p + 1}, W_2 = \frac{0,007}{0,005^2 p^2 + 20,075 \cdot 0,05p + 1}, W_3 = \frac{0,047}{0,0025p + 1},$$

$$L_1=L_2=4; T=934, W_{дос} = \frac{0,025}{0,01p + 1}.$$

Уравнение движения, описывающее динамику представленной системы управления, имеет следующий вид:

$$Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) = f(t) \left(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D) \right), \quad (4.193)$$

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [93], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = \left[x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \right] 1(t), \quad (4.194)$$

где $x_y = 0,023; H_1 = 0,023; \alpha = 3; \beta = 23 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,654 \text{ рад}$.

В соответствии п.п.2.2 подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) - f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)). \quad (4.195)$$

Запишем алгебраическое уравнение:

$$\int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\varphi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t) \cdot \varphi_q(t)dt - \int_0^{\infty} f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) \cdot \varphi_q(t)dt = 0, \quad (4.196)$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Система управления описывается относительно координаты выхода следующим дифференциальным уравнением:

$$21,5(0,005p+1)(0,005^2p^2+20,075 \cdot 0,05p+1)(0,0025p+1) \times \\ \times (0,06p^4+2,2p^3+23,34p^2+77,5p+56,3)(0,01p+1) \cdot x(t) + \\ + 0,0077(0,15p^3+6,7p^2+79,3p+214,3)x(t) = 0,0077(0,15p^3+6,7p^2+79,3p+214,3)f(t).$$

В ходе решения поставленной задачи параметрического синтеза необходимо обеспечивать в системе перерегулирование на уровне $\sigma \leq 17\%$ при $f(t)=1(t)$ переходном процессе, времени затухания $T_{п.п.} \leq 1$ сек и выполнять требования устойчивости.

Сравнивая результаты, полученные из схем на рисунках 4.20 и 4.22 получим переходные процессы, представленные на рисунке 4.23, где процесс «1» - желаемое программное движение, процесс «2» получен по результатам работы системы, когда блок трубопровода исследован как звено с распределенными параметрами, процесс «3» получен по результатам работы системы, когда блок трубопровода исследован как звено «чистого запаздывания».

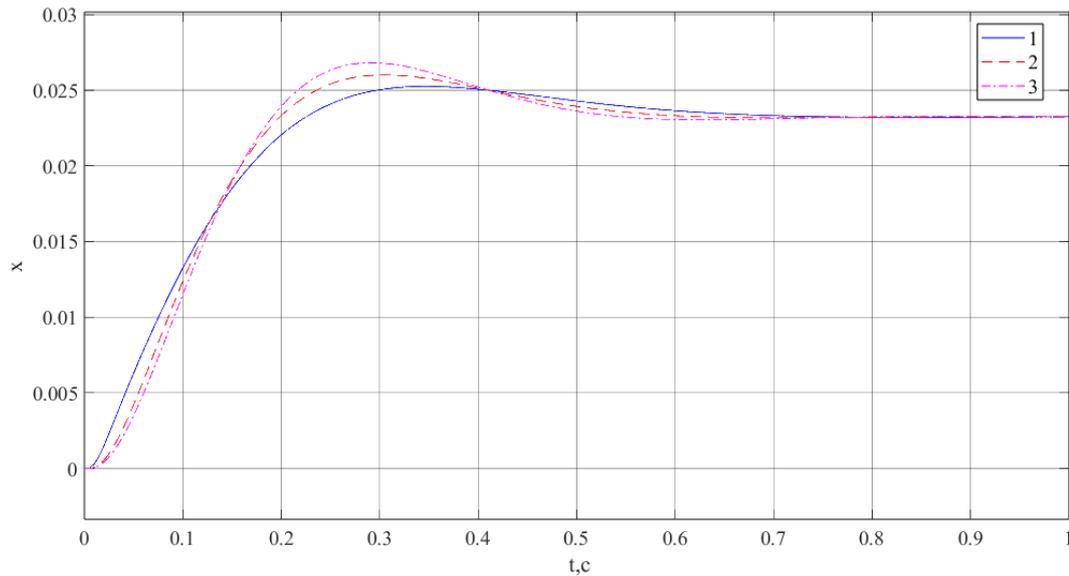


Рисунок 4.23 – График переходных процессов

Полученные графики переходных процессов показывают, что эквивалентная передаточная функция, полученная в результате реализации перехода от дифференциального гиперболического уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, приближенно обеспечивает заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме.

4.4 Выводы

1. Проведено моделирование трубопровода для термической жидкости. Определены допущения, при которых систему автоматического управления с распределенными параметрами можно рассматривать как САУ со звеном чистого запаздывания.

2. Проведено исследование длинной линии электропередач (звено САУ с распределенными параметрами). Определены допущения, при которых данное звено можно принять как звено с сосредоточенными параметрами в составе системы управления.

3. Реализован переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

4. Проведен параметрический синтез нелинейной системы с распределенными параметрами. В результате получены параметры системы, при которых САУ приближенно обеспечивает выполнение заданных показателей качества.

5. Проведен параметрический синтез регулятора непрерывной линейной системы автоматического управления. В результате получены параметры системы, при которых САУ приближенно обеспечивает выполнение заданных показателей качества.

6. Реализован алгоритм параметрического синтеза системы управления давлением в тормозной системе. Приведено сравнение, когда блок управления рассматривается как звено чистого запаздывания и с распределенными параметрами. Исходя из полученных значений следует вывод о том, что с применением модифицированного обобщенного метода Галеркина, математическая модель блока с распределенными параметрами дает более приближенную математическую модель.

Основные результаты, полученные в данном разделе, опубликованы автором в работах [58-59,108-113, 119, 121,126].

Заключение

По диссертационной работе можно сделать следующие выводы:

1. На основе анализа структурных схем линейных и нелинейных непрерывных и импульсных систем автоматического управления с распределенными параметрами разработаны усовершенствованные методы для распространения на новый класс систем.

2. Рассмотрена общая схема решения комплексной задачи синтеза непрерывных и импульсных систем управления с распределенными параметрами произвольно-высокого порядка с одним или несколькими импульсными элементами, в основу которой положен переход от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям и распространение прямого вариационного метода математической физики – обобщенного метода Галеркина (метода ортогональных проекций). Параметры системы определяются из условий, приближенных к заданным показателям качества работы системы в переходном режиме: времени переходного процесса, колебательности, перерегулирования. Вместе с тем, конечно, абсолютная устойчивость и грубость синтезируемых параметров системы управления гарантируется в соответствии с изменяемыми параметрами.

3. Обобщенный метод параметрического синтеза Галеркина унифицирован с целью его применения в непрерывных системах автоматического управления с распределенными параметрами произвольно-высокого порядка, содержащих нелинейные элементы, с однозначными и неоднозначными характеристиками, которые в свою очередь допускают кусочно-линейную аппроксимацию и аппроксимацию степенными функциями.

4. Обобщенный метод параметрического синтеза Галеркина унифицирован с целью его применения в импульсных системах автоматического управления с распределенными параметрами произвольно-высокого порядка, содержащих нелинейные элементы, с однозначными и неоднозначными характеристиками,

которые в свою очередь допускают кусочно-линейную аппроксимацию и аппроксимацию степенными функциями.

5. На основе предложенных методов синтеза непрерывных и импульсных систем управления, обладающих единой математической и методологической основой, разработаны унифицированные алгоритмы и программные модули синтеза САУ по заданным показателям качества работы в переходном режиме. Полученное программное обеспечение можно применять при решении задач параметрического синтеза линейных и нелинейных систем с распределенными параметрами, непрерывных и импульсных.

6. По результатам реализации алгоритма перехода в системах с распределенными параметрами от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям зарегистрированы программы для ЭВМ.

7. С помощью зарегистрированных программных продуктов решены задачи синтеза систем. Полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в научно-технической литературе, что подтверждает эффективность полученного метода.

8. В дальнейшем данное исследование будет направлено на создание программного комплекса, учитывающего различные виды систем автоматического управления, и, типы нелинейных элементов. Интерес к данной теме обусловлен тем, что решение задач синтеза САУ с распределенными параметрами требует сокращения времени расчёта и повышения точности вычислений варьируемых параметров регулятора системы.

Список использованных источников

1. Егоров, А.И., Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская, Изд-во Лань, - 2017. - 288 с.
2. Карначук В.И., Системы автоматического выравнивания нейтронного потока ядерных реакторах: учебное пособие / В.И. Карначук; Томский политехнический университет. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. - 221 с.
3. Юркевич Г.П. Системы управления энергетическими реакторами. - М.: Элек-КМ, 2001. – 344 с.
4. Малков, А.В., Кисловодское месторождение углекислых минеральных вод: системный анализ, диагностика, прогноз, управление / А.В. Малков, И.М. Першин, И.С. Помеляйко и др. – М.: Наука, 2015. – 283 с.
5. Першин, И.М., Технологическая безопасность эксплуатации гидроминеральных источников / И.М. Першин И.М., А.В. Малков, В.В. Цаплева, - Журн. Изв. ЮФУ. Технические науки. 2012. № 4. с. 25–31.
6. Першин, И.М., Системный анализ экологического состояния зоны гипергенеза курорта Кисловодска / И.М. Першин, И.С. Помеляйко, - Вест. Северо-Кавказского федерального ун-та. 2013. № 3 (36). с. 74–80.
7. Григорьев, В.В., Синтез распределенных регуляторов / В.В. Григорьев, С.В. Быстров, И.М. Першин - СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. –198 с.
8. Костюченко, Л.П. Имитационное моделирование систем электроснабжения в программе MATLAB: учеб. пособие / Л.П. Костюченко, Краснояр. гос. аграр. ун-т. - Красноярск, 2012. - 215 с.
9. Герасименко, А.А., Передача и распределение электрической энергии: Учеб. пособие / А.А. Герасименко, В.Т. Федин - Ростов-на-Дону.: Феникс; Красноярск: Издательские проекты, 2006. - 720 с.

10. Веников, В.А., Электрические системы. Электрические сети: учеб. Для электроэнерг. спец. вузов, под ред. В.А. Веникова, В.А. Строева. - 2-е изд. / В.А. Веников, А.А. Глазунов, Л.А. Жуков и др.- М.: Высш. шк., 1998. - 511 с.
11. Электротехнический справочник: В 4 т. Т. 3. Производство, передача и распределение электрической энергии / под общ. ред. проф. В.Г. Герасимова и др. (гл. ред. А.И. Попов). - 8-е изд., испр. и доп. - М.: Изд. МЭИ, 2002. - 964 с.
12. Боровиков, В.А., Электрические сети энергетических систем. / В.А. Боровиков, В.К. Косарев, Г.А. Ходот - Л.: Энергия, 1977. - 392 с.
13. Бабаков, Н. А., Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления, 2-е изд., перераб. и доп. / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, Г. А. Дидук, Н. Д. Дмитриев, Д. П. Ким, Б. М. Меиский, П. Н. Попович, под ред. А, А., Воронова. - М.: Высш. шк., 1986. - 367 с.
14. Федотов, А. В. Основы теории дискретных и нелинейных систем автоматического управления: Учебное пособие, / А.В. Федотов, - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. - 116 с.
15. Бесекерский, В.А., Теория автоматического управления: Изд. 4-е перераб. и доп. / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов, - СПб, Изд-во «Профессия», 2003. - 752 с. - (Серия: Специалист)
16. Клиндух, Н. Ю. Моделирование гидропривода в среде "MATLAB + SIMULINK" / Н. Ю. Клиндух, А. В. Цыганкова, С. В. Шилкин / Вестник КрасГАУ. - 2013. - № 11(86). с. 243-248
17. Емельянов, Р.Т., Моделирование рабочего процесса гидропривода с дроссельным регулированием / Р.Т. Емельянов., А.П. Прокопьев, А.С. Климов: Строительные и дорожные машины. - 2009. - № 11. - с. 62–64.
18. Бутковский, А.Г., Методы управления системами с распределёнными параметрами / А.Г. Бутковский: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М. 1975. - 568 с.

19. Чубаров, Е.П., Параметрические поля и особенности их регулирования / Е.П. Чубаров, В сб. «Современные проблемы кибернетики», М.: Наука, 1970. - с. 418-426.
20. Катус, Г.П., Автоматическое сканирование, / Г.П. Катус, «Машиностроение», 1969. - 517 с.
21. Самойленко, Ю. И., Пространственно распределенные приемные и управляющие системы / Ю. И. Самойленко, В.Л. Волкович, - «Техника», Киев, 1968 г., 136 с.
22. Фельдбаум, А.А., Вычислительные устройства в автоматических системах/А.А. Фельдбаум, - Физматгиз, 1959. - 800 с.
23. Фельдбаум, А.А., Основы теории оптимальных автоматических систем / А.А. Фельдбаум, - «Наука», 1966. - 623 с.
24. Фельдбаум, А.А., Методы теории автоматического управления / А.А. Фельдбаум, А.Г. Бутковский - «Наука», 1971. - 744 с.
25. Понтрягин, Л.С., Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко - Физматгиз, 1961. - 393 с.
26. Беллман (Bellman R.), Dynamic programming system identification, suboptimization. STAMJ. Control, v. 4, No. 1, 1966, p.48-51
27. Беллман (Bellman R.), New calasses of stochastic control processes, J. Math. Anal. and Appl., v.22, No. 3, June 1968, p. 58-71
28. Беллман, Р., Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, - 1962. - 332 с.
29. Беллман, Р., Детчменди, Д., Кадживада, Г., Калаба, Р. (Bellman R., Detchmendy D., Kagiwada H., Kalaba R.), On the identification of system and the unscrambling of data one-dimenisional, wave and diffusion processes. Anal., v.23, No. 1, 1968, 233-235 p.
30. Беллман, Р., Калаба, Р., (Bellman R, Kalaba R.), An inverse problem in dynamic programming and automatic control. J, Math. Anal. and Appl, v.7, No. 2, 1963, 145-169 p.

31. Чубаров, Е.П., Параметрические поля и особенности их регулирования. В сб. «Современные проблемы кибернетики», / Е.П. Чубаров, - М.: Наука, 1970.- с. 418-426.
32. Дегтярев, Г.Л., Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов - М.: Машиностроение, 1986. - 216 с.
33. Крейн, М.Г., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман - М.: «Наука», 1973. - 551 с.
34. Красовский, А.А., Основы автоматики и технической кибернетики / А.А. Красовский, Г.С. Паспелов - Госэнергоиздат, 1962. - 600 с.
35. Красовский, Н.Н., К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем / Н.Н. Красовский - Прикладная математика и механика, т.28, вып.1, 1964. с. 3-14
36. Красовский, Н.Н., Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах, / Н.Н. Красовский - Успехи Математических Наук, т. XX, вып. 3 (123), 1965. - 153–174 с.
37. Красовский, Н.Н., Лекции по теории управления / Н.Н. Красовский, Изд. Уральского гос. Ун-та, Свердловск - 1968. - 45 с.
38. Красовский, Н.Н., Теория управления движением, / Красовский, Н.Н.: Наука, 1968. - 475 с.
39. Красовский, Н.Н., Теория оптимальных управляемых систем / Н.Н. Красовский, Н.Н. Моисеев: Техническая кибернетика, №5 – 1967. - 5-12 с.
40. Першин, И.М. Синтез систем с распределенными параметрами / И.М. Першин, - Пятигорск, 2002. - 212 с.
41. Чернышев, А.Б., Устойчивость распределенных систем с дискретными управляющими воздействиями / А.Б. Чернышев, Ю.В. Ильюшин: Известия ЮФУ. технические науки, Изд.: Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2010. - 166-171 с.

42. Дегтярев, Г.Л., Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов, - М.: Машиностроение, 1986. - 216 с.
43. Чернышев, А.Б. Теория и методы анализа устойчивости и синтеза регуляторов нелинейных распределённых систем. [Текст]: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора техн. наук: 05.13.01: защищена 05.07 2011 г.: утв. 23.05.2011 г. / Чернышев А.Б. – Таганрог, 2011 г.. - 35 с.
44. Чернышев, А.Б. Устойчивость как фактор безопасности управляемых технических систем: Технологии техносферной безопасности, Изд. Академия Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, Москва, 2010. - 13 с.
45. Сиразетдинов, Т.К., Оптимизация систем с распределёнными параметрами, /Т.К. Сиразетдинов, М.: Наука, 1977. - 480 с.
46. Аузяк, А.Г., Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в системах с распределёнными параметрами по критерию обобщенной работы / А.Г. Аузяк, Г.Л. Дегтярев, - Изв. Вузов. Авиационная техника, № 4, 1976. - с. 11-16
47. Аузяк, А.Г. Синтез оптимального управления твердым телом с полностью, частично заполненной жидкостью, при неполном измерении. / А.Г. Аузяк, В кн. Динамика управляемых систем. Новосибирск: 1979. - с. 26-34
48. Дегтярев, Г.Л., Оптимальное управление процессами с распределёнными параметрами при неполном измерении / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов – Автоматика и телемеханика, № 5 - 1977, с. 5 - 10
49. Дегтярев, Г.Л. Синтез оптимального управления в системах с распределёнными параметрами при локальном критерии качества. – В кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением / Г.Л. Дегтярев - Новосибирск: Наука, 1979. с. 297 – 305

50. Сиразетдинов, Т.К. Синтез управления систем с распределенными параметрами при неполном измерении их состояний / Т.К. Сиразетдинов, - Изв. вузов. Сер. Авиационная техника, № 3 - 1971. с. 37-43
51. Сиразетдинов, Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами/Т.К. Сиразетдинов: - М.:Наука, 1977. 480 с.
52. Сиразетдинов, Т.К. Вопросы измерения устойчивости и оптимизации систем с распределенными параметрами. Preprints of Papers for IFAC Symposium on the Control of Distributed Parameter System, Banf, Canada, 1971, P.1233-1236
53. Дегтярев, Г.Л. Оптимальное управление стохастическими процессами с распределенными параметрами. - В кн.: Рефераты докладов VI Всесоюзного совещания по проблемам управления / Г.Л. Дегтярев, М.: Наука, 1974. - с. 85 – 87
54. Дегтярев, Г.Л. Синтез оптимального управления в линейных стохастических системах с распределенными параметрами. - В кн. Нелинейная механика. Днепропетровск / Г.Л. Дегтярев, изд. ДГУ, 1975. вып. 1, с. 121-125.
55. Дегтярев, Г.Л., Синтез оптимального управления космическим аппаратом с упругими элементами при случайных возмущениях / Г.Л. Дегтярев, В.Г. Лифанов - Изв.вузов. Сер. Авиационная техника, 1981. № 4, с. 23 - 26
56. Александров, И.А., Синтез регуляторов систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами и оценивание погрешности решения / И.А. Александров, В.И. Гончаров, Ф.Д. Нгуен, - Проблемы информатики, 2011, с 59 – 67
57. Гончаров, В.И. Вещественный интерполяционный метод синтеза систем автоматического управления / В.И. Гончаров - Томск: Изд-во ТПУ, 1995. - 224 с.
58. Шишлаков, В. Ф. Синтез параметров оператора управления системы с распределенными параметрами / В. Ф. Шишлаков, В. И. Гончарова // Волновая электроника и инфокоммуникационные системы: Материалы XXIII международной научной конференции, в 2 ч., Санкт-Петербург, 01–05 июня 2020 года. Том Часть 2. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский

- государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2020. - с. 375-385.
59. Шишлаков, Д. В. Математическая модель звена с распределенными параметрами / Д. В. Шишлаков, В. И. Гончарова / Завалишинские чтения 20: Сборник докладов, Санкт-Петербург, 15–18 апреля 2020 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2020. – С. 170-174. – DOI 10.31799/978-5-8088-1446-2-2020-15-170-174
60. Гончарова, В.И. Mathematical model of a link with distributed parameters// Журнал Bulletin of the UNESCO departament «Distance Education in engineering» of the SUAI, г. Санкт-Петербург, 2020. С. 66-73.
61. Shishlakov, V. F. Synthesis of parameters of a system control operator with distributed parameters / V. F. Shishlakov, V. I. Goncharova // 2020 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems, WECONF 2020, Saint-Petersburg, 01–05 июня 2020 года. Vol. [3]. – Saint-Petersburg, 2020. – P. 9131498. – DOI 10.1109/WECONF48837.2020.9131498
62. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров, - М.: Наука, 1978. - 464 с.
63. Коваль, В.А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем / В.А. Коваль, - Саратов: СГТУ, 1997. - 192 с.
64. Коваль, А. В. Решение задач распределенного управления на основе спектрального метода А. В. Коваль / Вестник Саратовского государственного технического университета. - 2011. - № 61. - с. 96-105.
65. Коваль, В.А. Метод пространственно-частотной декомпозиции для управления в трехмерном евклидовом пространстве / В.А. Коваль / Аналитические методы синтеза регуляторов: межвуз. науч. сб. Саратов: СПИ. – 1982. – С. 31-36.
66. Mitkowski W., Bauer W., Zag'orowska M. Discrete-Time Feedback Stabilization /Archives of Control Sciences. 2017. V. 27. No. 1. P. 309–321.

67. Брайсон, А., Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши - М.:Мир, 1972. - 272 с.
68. Поляк, Б.Т., Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков - М.: Наука, - 2001. - 303 с.
69. Веников, В.А. Теория подобия и моделирования / В.А. Веников, - М.: Высшая школа, 1976. - с.479
70. Тихонов, А.Н., Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров - М.: Наука, 1984. - 190 с.
71. Черных, И.В., Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. – М.: ДМК Пресс; СПб.; Питер, 2008. - 288 с.
72. Dommel H. Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiple Networks, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, No. 4, April, 1969.
73. Prinz, H., Zaengl, W., and O. Vdler, "Das Bergeron-Verfahren zur Lösung von Wanderwellen," Bull. SEV, vol. 16, pp. 725-739, August 1962.
74. Федотов, А.В. Анализ и синтез систем автоматического управления с использованием автоматизированных систем «MATLAB» и «CLASSIC»: сборн. заданий/ А.В. Федотов. Омск: Изд-во ОмГТУ, - 2006. - 66 с.
75. Казмиренко, В.Ф. Электрогидравлические мехатронные модули движения: основы теории и системное проектирование. / В.Ф. Казмиренко, - М.: Радио и связь, 2001. - 431 с.
76. Бутковский, А.Г., Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский, Л. Пустыльников - Москва.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, - 1980. - 384 с.
77. Математическое моделирование уравнений типа теплопроводности с разрывными коэффициентами / И. Ф. Жеребятьев, А. Т. Лукьянов. - Москва : Энергия, 1968. - 56 с., 97.
78. Анкилов, А. В. Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок: учебное пособие / А. В. Анкилов, П. А.

- Вельмисов, А. С. Семёнов; под общ. ред. П. А. Вельмисова. - 2-е изд. - Ульяновск: УлГТУ, 2010. - 179 с.
79. Гончарова, В.И., Шишлаков В.Ф., Гречкин Н.Л., Решетникова Н.В., Статкевич А.В., Ватаева Е.Ю. Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга, раздел «Разработка методов синтеза операторов управления существенно нелинейных САУ во временной области» Отчет о НИР / СПб.: ГУАП, 2024. 24 с.
80. Гончарова, В. И. Некоторые аппроксимирующие функции и разностные схемы для нелинейных элементов САУ / В. И. Гончарова / Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве: Сборник тезисов докладов II Международного форума, Санкт-Петербург, 09 ноября 2022 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2022. - с. 329-330
81. Гончарова, В. И. Выбор оптимального метода аппроксимации статической характеристики усилителя / В. И. Гончарова // Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве: Тезисы докладов I Международного форума, Санкт-Петербург, 10–11 ноября 2021 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2021. - с. 56-57
82. Гончарова, В. И. Определение достаточного числа значений для построения математических моделей нелинейных звеньев / В. И. Гончарова // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: IV Международный форум: сборник статей, Санкт-Петербург, 04 марта 2022 года / Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2022. - с. 48-49
83. Шишлаков, В. Ф. Построение математических моделей нелинейных звеньев / В. Ф. Шишлаков, В. И. Гончарова // Завалишинские чтения 22 : Сборник докладов XVII Международной конференции по электромеханике и

- робототехнике, Санкт-Петербург, 12-14 апреля 2022 года. - Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2022. – С. 103-109. - DOI 10.31799/978-5-8088-1705-0-2022-17-103-109
84. Гончарова, В. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022663274 Российская Федерация. Программа выбора оптимального метода аппроксимации по коэффициенту детерминации: № 2022662977: заявл. 13.07.2022: опубл. 13.07.2022 / В. И. Гончарова; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»
85. Гончарова, В. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022663275 Российская Федерация. Программа выбора оптимального метода аппроксимации по коэффициенту корреляции: № 2022662978: заявл. 13.07.2022: опубл. 13.07.2022 / В. И. Гончарова; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»
86. Гончарова, В. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022663276 Российская Федерация. Программа выбора оптимального метода аппроксимации по средней ошибке аппроксимации: № 2022662987: заявл. 13.07.2022 : опубл. 13.07.2022 / В. И. Гончарова; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»
87. Гончарова, В. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022619027 Российская Федерация. Программа для различных видов аппроксимации нелинейных характеристик: № 2022618769: заявл. 18.05.2022: опубл. 26.05.2022 / В. И. Гончарова; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего

образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

88. Гончарова, В.И. Overview of approximation methods // Журнал Bulletin of the UNESCO departament «Distance Education in engineering» of the SUAI, г. Санкт-Петербург, 2021. С. 51-57.
89. Гончарова, В.И. Various types of approximation of nonlinear links of automatic control systems // Журнал Bulletin of the UNESCO departament «Distance Education in engineering» of the SUAI, г. Санкт-Петербург, 2022. – С. 76-85.
90. Гончарова, В.И. About typical nonlinearities in automatic control systems / В.И. Гончарова // Журнал Bulletin of the UNESCO departament «Distance Education in engineering» of the SUAI, г. Санкт-Петербург, 2023. – С. 102-106.
91. Гончарова, В. И. Общая схема решения задачи синтеза линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами / В. И. Гончарова // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: VI Международный форум: сборник статей под ред. Академика РАН В.В. Окрепилова – СПб.: ГУАП, 2024. - С. 72-74
92. Гончарова, В. И. Переход от линейных дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям в системах автоматического управления с распределенными параметрами/ В. И. Гончарова // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: VI Международный форум: сборник статей под ред. Академика РАН В.В. Окрепилова – СПб.: ГУАП, 2024. - С. 68-71
93. Никитин, А.В., Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: Монография / А.В. Никитин, В.Ф. Шишлаков, Под ред. В.Ф.Шишлакова: СПбГУАП. СПб., 2003. - 358с.
94. Дилигенская, А.Н., Математическое моделирование систем с распределенными параметрами: учеб.пособие/ А.Н. Дилигенская, И.А. Данилушкин. – Самара: Самар. Гос. Техн. ун-т, 2012. - 65 с.

95. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А.А.Воронова и И.А.Орурка. М.: Наука, 1984. - 340 с.
96. Алгоритмы динамического синтеза нелинейных автоматических систем / Под ред. А.А.Воронова и И.А.Орурка. СПб.: Энергоатомиздат, 1992. - 334 с.
97. Шишлаков, В. Ф. Синтез нелинейных САУ с различными видами модуляции: Монография/СПбГУАП. СПб., 1999. 268 с.
98. Шишлаков, В.Ф. Синтез нелинейных импульсных систем управления во временной области. Известия ВУЗов «Приборостроение», №12, 2003, с.25 - 30.
99. Никитин, А.В., Параметрический синтез системы автоматического управления торможением колес транспортного средства / А.В. Никитин, В.Ф. Шишлаков // Известия ВУЗов «Приборостроение», №5, 2004. - с.24 – 29.
100. Шишлаков, В.Ф., Синтез дискретных САУ с запаздыванием методом ортогональных проекций / В.Ф. Шишлаков, В.Н. Грибков // Методы исследований и проектирования автоматических систем и приборов: ЛИАП. Л., 1990. с.35 – 41.
101. Шишлаков, В.Ф. Синтез нелинейных САУ с запаздыванием прямым вариационным методом / В.Ф. Шишлаков, // Методы и средства обработки и получения данных в информационно-управляющих системах / ЛИАП. Л., 1990. - с.30 – 37.
102. Айда-Заде, К. Р. Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи / К. Р. Айда-Заде, В. М. Абдуллаев // Автоматика и телемеханика. - 2022. – № 1. - с. 130-149
103. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М. : Мир, 1988. - 352 с.
104. Гончарова, В. И. Параметрический синтез линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами / В.И. Гончарова, В.Ф. Шишлаков, // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3.С. 230 - 240. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240

105. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование нелинейной динамики трубопровода / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, У. Д. Мизхер // Автоматизация процессов управления. - 2019. - № 3(57). - с. 93-101.
106. Вельмисов, П.А., Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. - 152 с.
107. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование нелинейной динамики трубопровода / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, У. Д. Мизхер // Автоматизация процессов управления. – 2019. – № 3(57). – С. 93-101.
108. Гончарова, В. И. Параметрический синтез нелинейной системы автоматического управления с распределенными параметрами / В. И. Гончарова // Труды МАИ. – 2024. – № 134. – 41 с. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178476>
109. Гончарова, В.И. Реализация перехода от дифференциальных эллиптических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.И. Гончарова // Молодёжь и будущее авиации и космонавтики - 2023: Сборник аннотаций конкурсных работ. 15-й Всероссийский межотраслевой молодёжный конкурс научно-технических работ и проектов в области авиационной и ракетно-космической техники и технологий, Москва, 20–24 ноября 2023 года. – Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. – С. 71.
110. Гончарова, В.И. Transition from differential equations to partial equations derivatives to ordinary differential equations for solving the problem of synthesis of nonlinear continuous systems with distributed parameters / В.И. Гончарова // Журнал Bulletin of the UNESCO chair «Distance Education in engineering» of the SUAI, г. Санкт-Петербург, 2024 г. – С. 12-16.
111. Гончарова, В.И. Решение задачи синтеза системы автоматического управления с распределенными параметрами, ЭНЕРГОСТАРТ: Материалы VI Международной молодежной научно-практической конференции, в рамках Десятилетия науки и технологий в Российской Федерации, Кемерово, 17–22

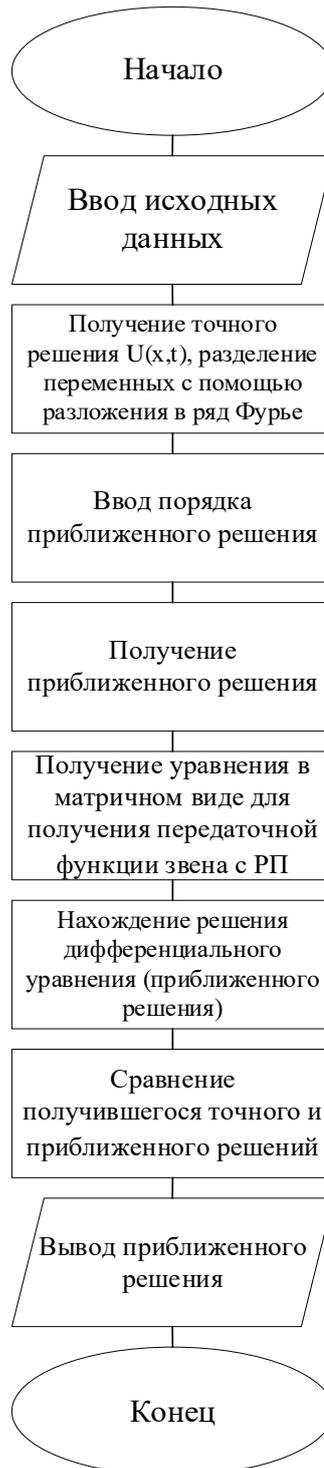
- ноября 2023 года / Редколлегия: Р.В. Беляевский (отв. редактор) [и др.]. – Кемерово: Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 2024. - с. 304-1-304-5
112. Гончарова, В.И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023664433: Российская Федерация. Программа для реализации перехода от дифференциальных параболических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям: № 2023663900: заявл. 05.07.2023: опубл. 05.07.2023 / В. И. Гончарова
113. Гончарова, В.И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023666043: Российская Федерация. Программа для реализации перехода от дифференциальных эллиптических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям: № 2023665378: заявл. 25.07.2023: опубл. 25.07.2023 / В. И. Гончарова
114. Першин, И.М. Анализ и синтез систем с распределенными параметрами / И.М. Першин, - Пенза: Изд-во «РИО КМВ», 2007. - 243 с.
115. Егоров, А.И. Метод Беллмана в задачах управления системами с распределенными параметрами / А.И. Егоров, Г. С. Бачой // Прикладная математика и программирование: Науч. сб. / Штиинца. - Кишинев, 1974. - Вып. 12. - с. 33-39.
116. Федотов, А. В., Основы теории автоматического управления / А. В. Федотов: Изд-во ОмГТУ, 2012. - 311 с.
117. Федотов, А.В. Анализ и синтез систем автоматического регулирования при проектировании средств автоматизации: учеб. пособие / А.В. Федотов. Омск: Изд-во ОмГТУ, 1995. - 48 с.
118. Model a Thermal Liquid Pipeline: официальный сайт – URL: www.mathworks.com/help/hydro/ug/model-a-thermal-liquid-pipeline.html (дата обращения 31.03.2023).
119. Гончарова, В.И. Моделирование трубопровода для термической жидкости/В.И. Гончарова // Датчики и системы. - 2023. - № 4-2(270) – с. 38 –

120. Методы и средства переработки информации в допечатных системах: Монография / О.А. Винокурова, М.В. Ефимов, Ю.Н. Самарин, М.А. Синяк; М-во образования Рос. Федерации. Моск. гос. ун-т печати. - Москва : [МГУП], 2003. (ИПК МГУП). - 269 с
121. Гончарова, В.И. Исследование модели длинной линии электропередач / В.И. Гончарова // Датчики и системы. - 2023. - № 4-1 (269) – с. 22 -34
122. Чернышев, А.Б. Исследование распределённых систем с дискретными управляющими воздействиями: автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.13.01: защищена 10.02.2005: утв. 30.12.2004/Чернышев А.Б. - Таганрог, 2004. - 17 с.
123. Гамынин, Н.С., Гидравлический привод системы управления / Н.С. Гамынин, М.: Машиностроение, 1972. – 376 с.
124. Гамынин, Н.С., Гидравлический следящий привод / Н.С. Гамынин, М.: Машиностроение, 1968. – 466 с.
125. Чарный, И.А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И.А. Чарный, - М.: Гостехиздат, 1951. - 224 с.
126. Гончарова, В.И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023681118: Российская Федерация. Программа для реализации перехода от дифференциальных гиперболических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям: № 2023680550: заявл. 10.10.2023: опубл. 10.10.2023 / В. И. Гончарова

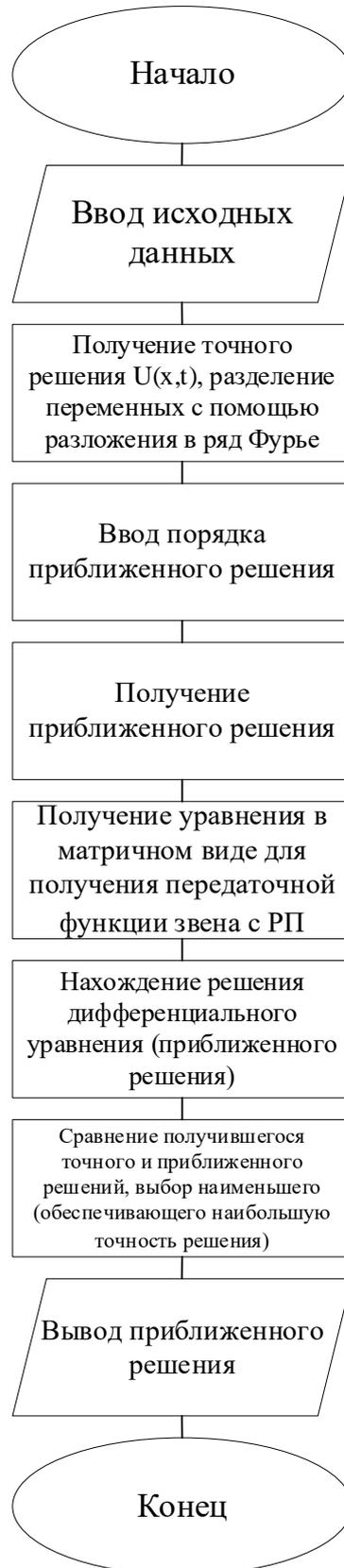
Приложение А

Блок-схемы

Блок схема программы для реализации перехода от параболических дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям



Блок-схема программы для реализации перехода от эллиптических и гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям



Приложение Б

Акты о внедрении результатов диссертационной работы

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИПМаш РАН)

В.О., Большой проспект, д.61, Санкт-Петербург, 199178
 Тел.: (812)-321-4778; факс: (812)-321-4771; <https://ipme.ru>

ОГРН 1037800003560, ИНН/КПП 7801037069/780101001



УТВЕРЖДАЮ



Директор ИПМаш РАН, д.т.н.

В.А. Делянский

2024 г.

АКТ О ВНЕДРЕНИИ

Результатов диссертационной работы

Гончаровой Виктории Игоревны

«Параметрический синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами»

Представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 2.3.1 - Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Комиссия в составе:

председателя, заведующего лабораторией Интеллектуальных электромеханических систем, доктора технических наук, А. Ю. Кучмина

Членов комиссии:

ведущего научного сотрудника лаборатории Интеллектуальных электромеханических систем, доктора физико-математических наук, Б.А. Кулика,

старшего научного сотрудника лаборатории Интеллектуальных электромеханических систем, кандидата технических наук, И.Л. Тарасовой,

составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Гончаровой В.И. «Параметрический синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами» представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, а именно: модифицированный метод параметрического синтеза линейных и нелинейных, непрерывных и импульсных систем автоматического управления с учетом специфики распределенных параметров по заданным показателям качества их работы в переходном режиме используется в научно-исследовательской деятельности федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук.

Председатель комиссии
заведующий лабораторией Интеллектуальных электромеханических систем, доктора технических наук,



А. Ю. Кучмин

Члены комиссии:
ведущий научный сотрудник лаборатории Интеллектуальных электромеханических систем, доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник лаборатории Интеллектуальных электромеханических систем, кандидат технических наук,



Б.А. Кулик



И.Л. Тарасова

02.04.2024



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГУАП)

ул. Большая Морская, д. 57, лит. А, Санкт-Петербург, 190000
Тел. (812) 710-6510, факс (812) 494-7057
E-mail: info@guap.ru, http://www.guap.ru
ИНН/ОГРН 02068462, ОГРН 1027810232680
ИНН/КПП 7812003110/783801001

№ _____
На № _____ от _____

УТВЕРЖДАЮ

Ректор ГУАП
Доктор экономических наук,
профессор

Матвеев
« 02 »



АКТ О ВНЕДРЕНИИ
результатов диссертационной работы
Гончаровой Виктории Игоревны

«Параметрический синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами»

Представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук
по специальности 2.3.1 - Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика

Комиссия в составе:

председателя, проректора по учебной деятельности, к.т.н., доцента В.А. Матяша

Членов комиссии:

начальника учебного управления, к.т.н. Н.В. Маркеловой

заместитель директора по учебно-воспитательной работе института киберфизических систем, к.т.н., доцента, А.Д. Жукова

составила настоящий акт о том, что результат диссертационной работы Гончаровой В.И. «Параметрический синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами» представленной на соискание ученой степен кандидата технических наук:

используется в учебном процессе на кафедре «Управление в технических системах» Санкт-Петербургского Государственного университета аэрокосмического приборостроения (ГУАП) по направлениям подготовки:

- 27.03.04 - Управление и информатика в технических системах,
- 16.03.01 - Техническая физика,
- 15.03.04 - Автоматизация технологических процессов и производств,
- 27.04.04 - Управление и информатика в технических системах.

Председатель комиссии
проректор по учебной деятельности,
к.т.н., доцент



В.А. Матяш

Члены комиссии:

начальник учебного управления,
к.т.н.
заместитель директора по
учебно-воспитательной работе
института киберфизических систем,
к.т.н., доцент



Н.В. Маркелова



А.Д. Жуков