

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ  
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

---

**ФИЗИКА**  
**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ  
ЗАДАНИЯ**

**ФАКУЛЬТЕТ  
ВЕЧЕРНЕГО И ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ**

**ЧАСТЬ II**



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**  
**2012**

УДК 531

Физика. Методические указания и контрольные задания. Факультет вечернего и заочного обучения. Часть II. А.Д. Андреев, В.М. Жуков, Л.М. Черных, М.П. Кузьмина, Т.М. Розе, В.И. Ефремов, С.А. Салль; ГУТ. СПб, 2012.

Методические указания содержат вопросы программы изучения разделов « Электрический ток», «Магнетизм», «Электромагнетизм», «Колебания», «Волны» курса общей физики, список литературы, примеры решения задач и задания по контрольной работе №2 для студентов заочной формы обучения.

Указания могут быть использованы для самостоятельной работы студентов первого курса всех форм обучения по программе бакалавриата.

*Методические указания рекомендованы к печати редакционно-издательским советом СПбГУТ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича*

Ответственный редактор - В.М. ЖУКОВ  
Рецензент - Б.И. САПРЫКИН

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ**

Студенты факультета ВИЗО СПбГУТ во второй части курса физики изучают следующие разделы: «Электрический ток», «Магнетизм», «Электромагнетизм», «Колебания», «Волны».

При выполнении контрольных заданий необходимо соблюдать следующие правила.

1. Номером варианта контрольных заданий, которые должен выполнить студент, является последняя цифра номера его студенческого билета.
2. Контрольные задания следует выполнять в отдельной тонкой тетради школьного типа.
3. Условия задач переписываются полностью, без сокращений.
4. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы, оставляя место для замечаний преподавателя.
5. При решении задач выполнять правила, указанные в пункте «Методические указания к решению задач» (см. ниже).
6. Если при проверке работы преподавателем в ней обнаружены серьезные ошибки и на обложке сделана пометка «на повторное рецензирование», нужно исправить ошибки и снова представить в деканат на проверку. Исправления нужно делать в той же тетради, в конце работы.
7. Если на обложке рецензентом сделана пометка «допущен к собеседованию», следует исправить ошибки, указанные преподавателем, и прийти с тетрадью на очное собеседование, которое осуществляется во время лабораторно-экзаменационной сессии. После этого контрольная работа может быть зачтена и студент допускается к сдаче экзамена.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

При решении задач студентам следует соблюдать приведенные ниже правила и последовательность действий:

1. Записать краткое условие задачи, вводя буквенные обозначения физических величин, указанных в условии задачи, и перевести их численные значения в систему СИ.
2. Сделать рисунок, поясняющий содержание задачи и введенные обозначения.
3. Указать физические законы, которые описывают явления, указанные в условии задачи.
4. Используя математическую запись законов, установленных в п. 3, составить уравнение или систему уравнений, из которых могут быть определены искомые величины.

5. Решить эти уравнения в общем виде и получить формулу, в левой части которой стоит искомая величина, а в правой величины, заданные в условии задачи.

6. Значения величин, заданные в условии задачи, подставить в полученную формулу и сделать вычисления, сохраняя при этом не более трех значащих цифр в ответе.

## ПРОГРАММА ВТОРОЙ ЧАСТИ КУРСА ФИЗИКИ

### 1. Электрический ток

#### ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ

1. Понятие об электрическом токе. Условия существования электрического тока в замкнутой цепи. Характеристики тока. Связь плотности тока с концентрацией и средней скоростью упорядоченного движения носителей тока.

2. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Напряжение. Закон Ома в интегральной форме для участка цепи и для замкнутой цепи. Сопротивление. Удельное сопротивление. Закон Ома в дифференциальной форме.

3. Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

4. Классическая теория электропроводности в металлах. Природа электрического сопротивления. Подвижность носителей тока. Недостатки классической электронной теории.

#### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Электрическим током называется упорядоченное движение носителей тока (электрических зарядов  $q$ ). За направление тока принимается направление движения положительных зарядов. Количественной характеристикой является сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

Распределение тока по сечению проводника характеризуется плотностью тока

$$j = \frac{dI}{dS_n}, \quad (1.2)$$

где:  $dI$  - сила тока, протекающего через элементарную поверхность  $dS_n$ , перпендикулярную (нормальную) к линиям тока.

Плотность тока – величина векторная. Она связана со скоростью упорядоченного движения носителей тока  $\vec{v}$ :

$$\vec{j} = q_0 n \vec{v}, \quad (1.3)$$

где:  $q_0$  – заряд носителя тока;  $n$  – концентрация носителей тока.

Количественными характеристиками источника тока являются внутреннее сопротивление  $r$  и электродвижущая сила (ЭДС)  $\varepsilon$ .

Дифференциальная форма закона Ома:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

(1.4)

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля в проводнике,  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость (удельная электропроводность). Величина  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  называется удельным сопротивлением.

Интегральная форма закона Ома:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.5)$$

Здесь:  $R$  – сопротивление участка цепи; для однородного участка цепи (ЭДС не действует)  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , где:  $U$  – электрическое напряжение;  $\varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов на концах участка. Для неоднородного участка  $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ , где  $\varepsilon_{12}$  – алгебраическая сумма ЭДС на данном участке.

Для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (1.6)$$

при этом  $R$  – сопротивление внешнего участка цепи;  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока.

Для однородного цилиндрического проводника с поперечным сечением  $S$  и длиной  $l$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (1.7)$$

Удельное сопротивление  $\rho$  линейно зависит от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ), \quad (1.8)$$

где:  $\rho_0$  – удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления;  $t^\circ$  – температура по шкале Цельсия.

Протекание тока силой  $I$  в проводнике сопровождается его нагреванием. Количество тепла  $Q$ , выделяющегося при этом за промежутки времени от  $t_1$  до  $t_2$  по закону Джоуля-Ленца равно:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt. \quad (1.9)$$

Удельная мощность  $w$ , под которой понимается физическая величина, численно равная количеству тепла, выделяемому в единице объема

проводника за единицу времени  $\left( w = \frac{dQ}{dVdt} \right)$ , рассчитывается по закону Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \sigma E^2 = \frac{1}{\rho} E^2 = \rho j^2. \quad (1.10)$$

Мощность тока  $P$  определяется следующим образом:

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (1.11)$$

Под подвижностью  $\mu$  носителя тока понимается физическая величина, численно равная скорости его упорядоченного движения под действием электрического поля единичной напряженности

$$\mu = \frac{v}{E}. \quad (1.12)$$

Высокая электропроводность металлов обусловлена тем, что в них имеется очень большое количество носителей тока – электронов проводимости (образовавшихся из валентных электронов атомов), которые не принадлежат определенному атому, а являются коллективизированными (обобщенными) электронами.

В классической электронной теории Друде-Лоренца эти электроны рассматриваются как электронный газ, обладающий свойствами одноатомного идеального газа.

Предположим, что при соударении с узлами кристаллической решетки электроны проводимости полностью теряют скорость упорядоченного движения, которую они приобретают под действием внешнего электрического поля за время  $\tau$  свободного пробега. В процессе свободного пробега электроны движутся равноускоренно. Поэтому средняя скорость упорядоченного движения  $\bar{v} = \frac{\bar{v}_{\max}}{2}$ , где  $\bar{v}_{\max}$  – среднее значение скорости, приобретенной электроном под действием электрического поля за время  $\tau$ .

Пусть  $m$  – масса электрона,  $e$  – абсолютная величина его заряда,  $E$  – напряженность стационарного электрического поля в проводнике. Уравнение движения электрона имеет вид:  $m \frac{dv}{dt} = eE$ . Интегрируя это уравнение по  $v$  от 0 до  $\bar{v}_{\max}$  и по  $t$  от 0 до  $\bar{\tau}$  ( $\bar{\tau}$  – средняя продолжительность свободного пробега электрона), получаем:  $\bar{v}_{\max} = \frac{eE}{m} \bar{\tau}$ .

Отсюда  $\bar{v} = \frac{eE}{2m} \bar{\tau}$ .  $\bar{\tau}$  можно выразить через среднюю длину свободного пробега  $\bar{\lambda}$  и среднюю скорость движения электронов относительно кристаллической решетки проводника. Эта скорость равна сумме средней скорости  $\bar{v}$  их теплового движения и средней скорости  $\bar{v}$  упорядоченного

движения. Тогда  $\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v} + \bar{v}}$ . Но для металлов  $\bar{v} \ll \bar{v}$  вследствие частых столкновений электронов с узлами решетки. Поэтому  $\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$  и  $\bar{v} = \frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}E$ .

Согласно выражению (1.3),  $j = en\bar{v}$ . Следовательно,  $j = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}E$ .

Обозначим  $\frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} = \sigma$  – удельная проводимость. С учетом этого  $j = \sigma E$ , то есть теоретически получен закон Ома (1.4).

В конце свободного пробега каждый электрон теряет скорость упорядоченного движения. Средняя энергия, передаваемая электроном иону, с которым он столкнулся, равна  $\frac{m(\bar{v}_{\max})^2}{2}$ . За единицу времени электрон в среднем претерпевает  $\bar{z}$  столкновений с узлами решетки, причем  $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\lambda}$ . Все  $n$  электронов проводимости, находящиеся в единице объема проводника (то есть  $n$  – концентрация электронов), испытывают  $n\bar{z}$  столкновений в единицу времени и передают узлам решетки металла энергию  $w = n\bar{z} \frac{m(\bar{v}_{\max})^2}{2}$ . Эта энергия идет на интенсификацию теплового движения ионов металла, то есть на нагрев проводника.

Учитывая вид  $\bar{z}$ ,  $\bar{v}_{\max}$  и  $\sigma$ , получим  $w = \frac{e^2 E^2 (\bar{\lambda})^2 n\bar{v}}{2m(\bar{v})^2 \bar{\lambda}} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} E^2 = \sigma E^2$ , –

закон Джоуля-Ленца (1.10).

К недостаткам классической электронной теории относится следующее. Она была чрезмерно упрощенной, так как в ней предполагалось, что все электроны в металле имеют одинаковую скорость теплового движения, хотя это не так. Далее, эксперимент, согласно выражению (1.8), показывает, что  $\rho \sim T$ , по теории же  $\rho \sim T^{1/2}$ . Согласно теории, электроны проводимости должны вносить заметный вклад в теплоемкость металлов, однако опыт показывает, что теплоемкость металлов мало отличается от теплоемкости других тел. Для того, чтобы по теоретически выведенным формулам получить такие значения удельной проводимости металлов, которые совпадали бы с экспериментальными данными, приходится принимать среднюю длину свободного пробега электронов в металле  $\bar{\lambda}$  в сотни раз большей, чем период решетки металла. Иными словами, приходится предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междуузельных расстояний. Однако такое предположение противоречит классической электронной теории электропроводности металлов.

## 2. Магнетизм

### ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ

1. Опыт Эрстеда. Магнитное поле и его характеристики. Магнитная индукция. Принцип суперпозиции для магнитных полей. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

2. Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле в центре кругового тока. Магнитное поле отрезка прямого тока. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Магнитное поле внутри проводника с током. Магнитное поле соленоида.

3. Сила Ампера. Контур с током в однородном магнитном поле. Работа поворота контура с током в однородном магнитном поле. Энергия контура. Поток вектора магнитной индукции. Выражение работы силы Ампера через поток вектора  $\vec{B}$ . Теорема Гаусса для вектора  $\vec{B}$ .

4. Орбитальный и спиновый магнитные моменты электрона. Гиромагнитное отношение. Магнитные моменты атомов. Вектор намагниченности. Напряженность магнитного поля. Парамагнетики. Диамагнетики. Ферромагнетики.

### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Движущиеся заряды и электрические токи изменяют свойства окружающего пространства – создают в нем магнитное поле. Наличие этого поля проявляется в том, что на другие движущиеся заряды и проводники с токами действует сила. Силовой характеристикой магнитного поля является индукция  $\vec{B}$ , вспомогательной – напряженность  $\vec{H}$ , связанные соотношением  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ , где:  $\mu$  – магнитная проницаемость (характеризует свойства среды);  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная.

Справедлив принцип суперпозиции магнитного поля:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (2.1)$$

Сила Лоренца  $\vec{F}_L$  – сила, действующая на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ :

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (2.2)$$

Для положительных зарядов вектора  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{F}_L$  образуют правовинтовую систему. Модуль силы Лоренца рассчитывается по формуле:

$$F_L = |q|vB\sin\alpha, \quad (2.3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

В однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно скорости заряженной частицы ( $\alpha = \pi/2$ ), под действием силы Лоренца



частица движется по окружности постоянного радиуса  $R$  с постоянной скоростью  $v$ . Окружность лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ . При этом выполняются соотношения:

$$|q|vB = mv^2/R, \quad T = 2\pi R/v \quad (2.4)$$

где:  $m$  – масса частицы,  $T$  – период ее обращения. Из этих выражений получается, что  $T = \frac{2\pi m}{|q|B}$  и не зависит от скорости частицы ( $v \sim c$ ).

Когда  $0 < \alpha < \pi/2$ , заряд движется по винтовой траектории. При этом справедливы соотношения:  $qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}$ ,  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$ ,  $h = v_{\parallel}T$ , где  $R$  – радиус винтовой линии,  $h$  – шаг винтовой линии;  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ ,  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ . Тогда  $R$  и  $h$  винтовой линии равны:

$$R = \frac{mv}{|q|B} \sin \alpha, \quad h = 2\pi \frac{m}{|q|B} v \cos \alpha. \quad (2.5)$$

В металле или полупроводнике с током, помещенном в магнитное поле, перпендикулярное вектору плотности тока проводимости  $\vec{j}$ , из-за отклонения электронов под действием силы Лоренца возникает поперечное электрическое поле и разность потенциалов (эффект Холла). Отклонение электронов магнитным полем происходит до тех пор, пока действие на них силы со стороны поперечного электрического поля не скомпенсирует действие силы Лоренца. Равновесная разность потенциалов в эффекте Холла

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{en} \frac{IB}{d}, \quad (2.6)$$

где:  $e$  – абсолютная величина заряда электрона;  $n$  – концентрация свободных электронов в данном проводнике;  $I$  – величина продольного тока;  $B$  – индукция магнитного поля;  $d$  – линейный размер металла или полупроводника в направлении вектора  $\vec{B}$ .

Закон Био-Савара-Лапласа: индукция  $d\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого элементом  $d\vec{l}$  проводника с током  $I$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \vec{r}]}{r^3}, \quad (2.7)$$

где:  $d\vec{l}$  – вектор (модуль которого равен длине элемента  $dl$ ), направленный по току;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, направленный из начала  $d\vec{l}$  в точку наблюдения. Отсюда  $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

С учетом принципа суперпозиции, используя закон Био-Савара-Лапласа, рассчитывается индукция (или напряженность  $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$ )

магнитного поля, создаваемого электрическим током, текущим по проводнику произвольной формы.

Прямолинейный проводник конечного размера с током  $I$  создает в произвольной точке пространства магнитное поле с индукцией  $B$ :

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r_0} I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (2.8)$$

где:  $r_0$  – кратчайшее расстояние от прямого проводника до точки наблюдения;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, которые образуют радиус-векторы, проведенные в точку наблюдения из начала и конца проводника (начало и конец определяют, связывая их с направлением тока).

Для бесконечно длинного прямого проводника ( $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi r_0} I. \quad (2.8.1)$$

Индукция магнитного поля в центре кругового контура радиусом  $R$  с током  $I$ :

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2R}, \quad (2.9)$$

где  $N$  - число витков контура.

Циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на  $\mu_0$  (теорема о циркуляции):

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{k=n} I_k. \quad (2.10)$$

При помощи теоремы о циркуляции рассчитывается напряженность  $H$  (или индукция  $B = \mu\mu_0 H$ ) магнитного поля в следующих случаях.

Внутри проводника с током  $I$ , равномерно распределенным по сечению

$$H = \frac{Ir}{2\pi R}.$$

(2.11) Здесь:  $r$  – расстояние от оси проводника до точки наблюдения;  $R$  – радиус проводника.

Внутри тороида с током  $I$ :

$$H = \frac{NI}{l},$$

(2.12) где:  $N$  – число витков тороида,  $l$  – длина его осевой линии.

Внутри длинного соленоида с током  $I$  магнитное поле однородное,

$$H = nI, \quad (2.13)$$

где  $n$  – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины.

Со стороны магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  на проводник с током действует сила Ампера:

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}\vec{B}], \quad (2.14)$$

где:  $d\vec{F}_A$  – элементарная сила, действующая на малый элемент длины  $dl$  проводника с током  $I$ ;  $d\vec{l}$  – вектор с модулем  $dl$ , направленный так же, как вектор плотности тока  $\vec{j}$  в проводнике. Вектора  $d\vec{l}$ ,  $\vec{B}$  и  $d\vec{F}_A$  образуют правовинтовую систему. Модуль  $d\vec{F}_A$  определяется выражением  $dF_A = IdlB \sin \alpha$ ,

$\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

На единицу длины каждого из двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящихся на расстоянии  $a$  друг от друга, действует сила

$$F_{eo} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{a}. \quad (2.15)$$

Работа  $A$ , совершаемая силой Ампера при конечном перемещении в магнитном поле проводника с постоянным током  $I$ , рассчитывается по формуле:

$$A = I\Phi, \quad (2.16)$$

где  $\Phi$  – поток вектора магнитной индукции через поверхность  $S$ , которую очерчивает проводник при своем движении. При этом  $\Phi = \int_S B_n dS$ ,  $B_n$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на нормаль к элементу поверхности  $dS$ .

Математическим выражением того, что в природе отсутствуют магнитные заряды, является теорема Гаусса:

$$\oint_S B_n dS = 0 \quad (2.17)$$

(поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю).

Если контур (катушка) имеет  $N$  одинаковых витков, то потокосцеплением контура  $\psi$  называется полный магнитный поток через все  $N$  витков катушки:  $\psi = N\Phi$ .

При перемещении (например, повороте) в магнитном поле из положения 1 в положение 2 замкнутого плоского контура с постоянным током  $I$  совершается работа

$$A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (2.18)$$

$\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – магнитные потоки, сцепленные с контуром в этих положениях.

Плоский контур с током  $I$  обладает магнитным моментом

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (2.19)$$

где:  $S$  – площадь плоской поверхности, ограниченной контуром;  $\vec{n}$  – нормаль к указанной поверхности, направление тока в контуре и  $\vec{n}$  связаны правилом правого винта. Если контур содержит  $N$  витков, то  $p_m = NIS$ .

На контур с током со стороны магнитного поля действует вращающий момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]. \quad (2.20)$$

При этом  $M = p_m B \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{B}$ .

В магнитном поле контур с током обладает потенциальной энергией

$$W = -p_m B \cos \alpha. \quad (2.21)$$

Вещества, способные намагничиваться во внешнем магнитном поле, то есть создавать собственное магнитное поле, называются магнетиками. Магнитные свойства магнетиков определяются магнитными свойствами электронов и атомов, входящих в их состав.

Движение электрона в атоме по орбите эквивалентно некому замкнутому контуру с током (орбитальный ток). Согласно выражению (2.19) орбитальный магнитный момент электрона  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ . При этом модуль  $p_m = IS = ev\pi r^2$ , где  $I = ev$ ,  $e$  – абсолютная величина заряда электрона,  $v$  – число оборотов электрона по орбите в единицу времени (частота вращения),  $r$  – радиус круговой орбиты. Поскольку скорость движения электрона  $v = 2\pi r\nu$ , то  $p_m = \frac{evr}{2}$ .

Движущийся по орбите электрон обладает орбитальным моментом импульса  $\vec{L}_e$ , модуль которого  $L_e = mvr$ . Вектор  $\vec{L}_e$  направлен противоположно вектору  $\vec{p}_m$ .

Отношение магнитного момента частицы к ее механическому моменту называется магнитомеханическим или гиромангнитным отношением  $\gamma$ . Для электрона  $\gamma = \frac{p_m}{L_e} = -\frac{e}{2m}$ . Знак «-» обусловлен тем, что направления моментов противоположны.

Электрон обладает также собственным моментом импульса  $\vec{L}_{es}$ , который называется спином электрона. Важнейшей особенностью спина электрона является наличие только двух его проекций на направление вектора  $\vec{B}$  индукции магнитного поля, безотносительно к тому, является это поле внешним или внутренним полем самого вещества.

Спину электрона соответствует спиновый магнитный момент  $\vec{p}_{ms}$ , пропорциональный спину и направленный в противоположную сторону:  $\vec{p}_{ms} = \gamma_s \vec{L}_{es}$ . Величина  $\gamma_s$  называется гиромангнитным отношением спиновых моментов:  $\gamma_s = -\frac{e}{m}$ .

Если атомы вещества находятся во внешнем магнитном поле, то в результате так называемой прецессии электронной орбиты возникает наведенный магнитный момент  $\Delta\vec{p}_m$ , направленный противоположно  $\vec{B}$ .

Ядра атомов также обладают магнитными моментами, которыми можно пренебречь по сравнению с магнитными моментами электронов. Отсюда следует, что магнитные свойства атомов определяются магнитными свойствами входящих в его состав электронов.

Орбитальным магнитным моментом атома называется векторная сумма магнитных моментов всех его электронов.

Характеристикой намагничивания вещества является вектор намагниченности  $\vec{J}$ : 
$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_m$$
, где  $\vec{P}_m$  – магнитный момент  $i$ -го атома (молекулы),  $N$  – общее число атомов (молекул) в малом объеме  $\Delta V$ . В пределах  $\Delta V$  магнитное поле считается однородным.

Напряженность  $\vec{H}$  магнитного поля: 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$
. Намагниченность  $\vec{J}$  принято связывать с  $\vec{H}$  следующим образом:  $\vec{J} = \chi \vec{H}$ , где  $\chi$  – безразмерная величина, называемая магнитной восприимчивостью. Тогда 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}.$$

Отсюда 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}.$$
 Безразмерная величина  $\mu = 1 + \chi$  называется магнитной проницаемостью вещества. Следовательно, как и указано выше, 
$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

Диамагнетики – это такие вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов (или молекул) равны нулю. Во внешнем магнитном поле возникают наведенные магнитные моменты  $\Delta \vec{p}_m$ , направленные противоположно  $\vec{B}$ . Поэтому в диамагнетиках магнитное поле ослабляется,  $\chi < 0$ , а  $\mu < 1$ .

У парамагнетиков в отсутствие внешнего поля атомы (молекулы) обладают некоторыми постоянными магнитными моментами. Совместное действие внешнего поля и межатомных столкновений приводит к тому, что магнитные моменты атомов ориентируются преимущественно вдоль внешнего магнитного поля. Эти магнитные моменты существенно больше  $\Delta \vec{p}_m$ . Следовательно, в парамагнетиках магнитное поле усиливается,  $\chi > 0$ , а  $\mu > 1$ .

Ферромагнетиками называются вещества, в которых внутреннее магнитное поле в сотни и тысячи раз превышает вызвавшее его внешнее магнитное поле.

### 3. Электромагнетизм

#### ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ

1. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Правило Ленца. Величина электрического заряда, проходящего через поперечное сечение контура, в котором наводится индукционный ток.

2. Индуктивность контура. Индуктивность соленоида. Явление самоиндукции. Законы изменения силы электрического тока в цепи при ее размыкании и замыкании.

3. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность двух контуров. Энергия магнитного поля контура с током. Объемная плотность энергии магнитного поля. Взаимная энергия двух контуров с токами.

4. Вихревое электрическое поле. Плотность тока смещения. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.

### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Явление электромагнитной индукции заключается в том, что при изменении магнитного потока через поверхность  $S$ , ограниченную проводящим контуром  $l$ , в нем возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ . Если проводящий (проволочный) контур замкнут, в нем протекает ток, который называется индукционным.

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.1)$$

где  $\frac{d\psi}{dt}$  – скорость изменения потокосцепления с магнитным полем,  $N$  – число витков в контуре,  $\Phi = \int_S B_n dS$  – магнитный поток.

Знак «–» является математическим отображением правила Ленца: индукционный ток направлен таким образом, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего индукционный ток.

На концах прямого проводника длиной  $l$ , движущегося со скоростью  $v$  перпендикулярно линиям индукции магнитного поля с индукцией  $B$ , возникает разность потенциалов

$$U = Blv. \quad (3.2)$$

В замкнутом контуре площадью  $S$ , содержащем  $N$  витков и равномерно вращающемся с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t. \quad (3.3)$$

Через поперечное сечение контура сопротивлением  $R$ , в котором наводится индукционный ток, проходит электрический заряд

$$q = \frac{\psi_1 - \psi_2}{R}, \quad (3.4)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – значения потокосцепления контура в начальном и конечном положениях.

Индуктивность контура  $L$  – это коэффициент пропорциональности между током в контуре  $I$  и связанным с ним потокосцеплением  $\psi$  (статическое определение индуктивности):

$$\psi = LI. \quad (3.5)$$

Если поблизости нет ферромагнетиков, то  $L = const$ .

Индуктивность длинного соленоида рассчитывается по формулам

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (3.6)$$

Здесь:  $N$  – число витков соленоида;  $l$  – длина соленоида;  $S$  – площадь его поперечного сечения;  $n$  – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины;  $V$  – объем соленоида.

При изменении тока  $I$  в контуре индуктивностью  $L$  в нем возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) служит динамическим определением индуктивности: это коэффициент пропорциональности между скоростью изменения тока в контуре и возникающей в нем ЭДС самоиндукции.

В электрической цепи, содержащей индуктивность  $L$ , при отключении источника ЭДС ток экспоненциально уменьшается:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (3.8)$$

где:  $I_0$  – первоначальное значение сила тока;  $R$  – сопротивление цепи.

При включении источника ЭДС  $\varepsilon$  ток в цепи экспоненциально возрастает до установившегося значения  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ :

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (3.9)$$

Под взаимной индуктивностью  $L_{12}$  или  $L_{21}$  двух контуров (первого и второго) понимается коэффициент пропорциональности между током в одном контуре и потокосцеплением, связанным с другим контуром:

$$\psi_2 = L_{21}I_1, \quad \psi_1 = L_{12}I_2. \quad (3.10)$$

Если контуры находятся в неферромагнитной среде, то  $L_{21} = L_{12} = const$ .

Взаимная индуктивность двух катушек, имеющих общую ось, рассчитывается по формуле

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S, \quad (3.11)$$

где:  $N_1$  и  $N_2$  – число витков в катушках;  $l$  – длина катушек;  $S$  – площадь поперечного сечения катушек.

При изменении тока в одном контуре в другом контуре наводится ЭДС взаимной индукции (явление взаимной индукции):

$$\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad \varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (3.12)$$

Энергия магнитного поля контура индуктивностью  $L$  с током  $I$ :

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.13)$$

Объемная плотность энергии ( $w = \frac{dW}{dV}$ ) магнитного поля:

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (3.14)$$

Энергия магнитного поля, заключенная в выбранном объеме  $V$ :

$$W = \int_V w dV. \quad (3.15)$$

Энергия  $W$  системы двух контуров (катушек), имеющих общую ось:

$$W = W_1 + W_2 \pm L_{12} I_1 I_2. \quad (3.16)$$

Здесь:  $W_1$  – энергия первого контура,  $I_1$  – ток в первом контуре;  $W_2$  – энергия второго контура,  $I_2$  ток во втором контуре;  $L_{12} I_1 I_2$  – взаимная энергия двух контуров (двух токов). Выбор знака «+» или «-» зависит от того, в одном или в противоположных направлениях протекают токи в контурах.

Важными характеристиками электрического и магнитного полей являются дивергенция и ротор. Дивергенция – скалярное поле, характеризующее плотность источников данного векторного поля ( $\vec{E}$  или  $\vec{B}$ ). Обозначения:  $div\vec{E}$ ,  $div\vec{B}$ . Ротор (или вихрь) векторного поля – векторная характеристика «вращательной составляющей» этого поля, обозначается  $rot\vec{E}$ ,  $rot\vec{B}$ .

Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле вызывает появление в окружающем пространстве электрического поля, напряженность которого обозначим  $\vec{E}_B$ . Наличие проволочного контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства поля  $\vec{E}_B$ .

Это поле  $\vec{E}_B$  существенно отличается от электростатического поля напряженностью  $\vec{E}_q$ , порождаемого зарядами. Поле  $\vec{E}_q$  потенциально, его силовые линии начинаются и оканчиваются на зарядах (или на бесконечности), в любой точке поля  $rot\vec{E}_q = 0$ .

Напротив,  $rot\vec{E}_B = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0$ . Следовательно, поле  $\vec{E}_B$ , как и магнитное поле, является вихревым. Силовые линии этих полей замкнуты.

В общем случае электрическое поле может слагаться из  $\vec{E}_q$  и  $\vec{E}_B$ . По принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$ . Тогда  $rot\vec{E} = rot\vec{E}_q + rot\vec{E}_B = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ . Итак,



$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) является одним из основных в электромагнитной теории Максвелла.

Максвелл предположил также, что переменное электрическое поле, как и электрический ток, создает магнитное поле. Количественной мерой магнитного действия переменного электрического поля является ток смещения. Плотность тока смещения  $\vec{j}_{cm}$  равна скорости изменения электрической индукции  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ :

$$\vec{j}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.18)$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная.

Током смещения  $I_{cm}$  через произвольную поверхность  $S$ :

$$I_{cm} = \int_S \vec{j}_{cm} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (3.19)$$

где  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  – нормаль к элементу поверхности  $dS$ .

Теорией Максвелла называется теория единого электромагнитного поля, создаваемого произвольной системой зарядов и токов. При этом решается основная задача электродинамики: по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются характеристики создаваемых ими электрического и магнитного полей. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.20)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.22)$$

В первую пару уравнений входят только основные характеристики полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , во вторую – только вспомогательные величины  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ . Уравнение (3.17) является по существу выражением закона электромагнитной индукции. Уравнение (3.20) указывает на отсутствие источников магнитного поля, то есть магнитных зарядов. Уравнение (3.21) устанавливает связь между токами проводимости и смещения и

порождаемым ими магнитным полем. Уравнение (3.22) показывает, что источниками вектора  $\vec{D}$  являются электрические заряды ( $\rho = \frac{dq}{dV}$  – объемная плотность зарядов).

Система уравнений Максвелла дополняется уравнениями, характеризующими электрические и магнитные свойства среды:  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$  и  $\vec{j} = \sigma\vec{E}$  – закон Ома в дифференциальной форме, см. выражение (1.4).

Из уравнений в дифференциальной форме можно получить уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l E_t dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s B_n dS, \quad (3.23)$$

$$\oint_l B_n dS = 0, \quad (3.24)$$

$$\oint_l H_t dl = \int_s j_n dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_s D_n dS, \quad (3.25)$$

$$\oint_l D_n dS = \int_v \rho dV. \quad (3.26)$$

В уравнениях (3.23) и (3.25)  $S$  – поверхность, ограниченная контуром  $l$ . В уравнениях (3.24) и (3.26)  $S$  – поверхность, ограничивающая объем  $V$ .

## 4. Колебания

### ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ

1. Свободные гармонические незатухающие колебания в механической системе; в электрическом контуре. Энергия системы при незатухающих колебаниях.

2. Свободные затухающие колебания в механической системе; в электрическом контуре. Дифференциальное уравнение для затухающих колебаний и его решения. Апериодический процесс. Декремент затухания.

3. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение и его решения. Зависимость амплитуды и фазы колебаний от частоты. Явление резонанса.

4. Представление колебаний при помощи вращающегося вектора. Сложение колебаний одинакового направления и частоты. Биения. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых и кратных частот. Фигуры Лиссажу.

### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Колебания – это процессы, при которых физическая величина изменяется во времени от минимального до максимального значения. Колебания называются периодическими, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через

равные промежутки времени. Наименьший из этих промежутков – период колебаний  $T$ . Частота колебаний  $\nu = 1/T$  определяет число колебаний за единицу времени. Циклическая (или круговая) частота  $\omega$  равна числу колебаний за  $2\pi$  единиц времени:  $\omega = 2\pi\nu$ . Тогда  $\omega = 2\pi/T$ .

Колебание называется гармоническим, если колеблющаяся величина  $x$  изменяется во времени по законам:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ или } x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.1)$$

Здесь:  $x_m$  – наибольшее значение  $x$  или амплитуда колебаний;  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  – фаза колебаний (определяет значение и направление изменения колеблющейся величины в момент времени  $t$ );  $\varphi_0$  – начальная фаза (определяет значение и направление изменения при  $t = 0$ ).

Гармонические колебания – простейший вид колебаний. Любой сложный колебательный процесс может быть представлен в виде конечной или бесконечной суммы гармонических колебаний (Фурье-анализ).

Если материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси координат  $OX$  около положения равновесия, принятого за начало координат, то

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4.2)$$

где:  $x$  – координата колеблющейся материальной точки (смещение от положения равновесия);  $A \equiv x_m$  – амплитуда колебаний.

Скорость колеблющейся точки (колебательная скорость):

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ или } v = v_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.3)$$

где  $v_{\max} = A\omega$  – амплитудное значение колебательной скорости.

Ускорение колеблющейся точки (колебательное ускорение):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ или} \quad (4.4)$$

$$a = a_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi), \quad (4.5)$$

где  $a_{\max} = A\omega^2$  – амплитудное значение колебательного ускорения.

Движение тела массой  $m$ , выведенного из положения равновесия, под действием только упругой силы  $F = -kx$ , обусловленной деформацией пружины  $x$  (пружинный маятник;  $x$  – смещение тела от положения равновесия;  $k$  – коэффициент упругости пружины) описывается дифференциальным уравнением, полученным на основе второго закона Ньютона:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.6)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ .

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.7)$$

Следовательно, под действием только упругой силы тело совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  и периодом  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Амплитуда колебаний  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями.

Механическая энергия  $W$  колебательной системы включает потенциальную энергию деформированной пружины  $W_{II}$  и кинетическую энергию движущегося тела  $W_K$ :

$$W_{II} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.8)$$

Тогда 
$$W = W_{II} + W_K = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 = const, \quad (4.9)$$

то есть механическая энергия колебательной системы остается постоянной.

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на длинной тонкой невесомой и нерастяжимой нити длиной  $l$ . При малых углах ( $\leq 5^\circ \div 7^\circ$ ) отклонения нити от вертикали совершаются гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (4.10)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Физический маятник – твердое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси  $O$ , не проходящей через центр тяжести тела. При малых углах ( $\leq 5^\circ \div 7^\circ$ ) отклонения маятника от вертикали совершаются гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (4.11)$$

где:  $J$  – момент инерции тела относительно оси  $O$ ;  $m$  – масса маятника;  $d$  – расстояние от центра инерции маятника до оси  $O$ .

В электрическом контуре, состоящем из конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивностью  $L$  и активного сопротивления  $R$ , происходят колебания заряда  $q$  и напряжения  $U$  на обкладках конденсатора, а также силы тока  $I$  в контуре.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний заряда в идеальном контуре ( $R=0$ ), полученное на основе закона Ома, имеет вид:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.12)$$

где  $\ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2}$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Его решением является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.13)$$

Следовательно, заряд  $q$  совершает гармонические колебания с амплитудой

$q_m$ , частотой  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и периодом  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  (формула Томсона).

Величины  $q_m$  и  $\varphi_0$  определяются начальными условиями.

Закон изменения  $U$  устанавливается на основе определения емкости конденсатора  $C = q/U$ . Тогда

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

(4.14) где  $U_m = q_m/C$  – амплитуда колебаний напряжения на обкладках конденсатора.

Изменение тока в контуре происходит по закону

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.15)$$

где  $I_m = \omega_0 q_m$ . То есть, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ .

В идеальном контуре происходит периодическое преобразование энергии  $W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$  электрического поля конденсатора в энергию  $W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$  магнитного поля катушки индуктивности и наоборот. Значения  $W_C$  и  $W_L$  изменяются в пределах от 0 до максимальных значений, соответственно равных  $\frac{q_m^2}{2C}$  и  $\frac{LI_m^2}{2}$ , причем  $\frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$ . Полная энергия  $W$  контура не изменяется с течением времени:

$$W = W_C + W = W_C + W_L = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = const. \quad (4.16)$$

Дифференциальное уравнение движения тела массой  $m$ , выведенного из положения равновесия, на которое действуют упругая сила  $F = -kx$  и сила сопротивления среды  $F_C = -rV = -r \frac{dx}{dt} = -r\dot{x}$  ( $r$  – коэффициент сопротивления), имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.17)$$

где:  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\beta = \frac{r}{2m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Вместо обозначения  $\beta$  здесь и далее можно также использовать обозначение  $\alpha$  ( $\beta \equiv \alpha$ ).

При выполнении условия  $\omega_0^2 > \beta^2$  решением уравнения (4.17) является функция

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4.18)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , а постоянные величины  $A_0$  и  $\varphi_0$  зависят от начальных

условий. Выражение (3.18) называют уравнением затухающих колебаний механической системы.

Величина  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний,  $A_0$  – начальная амплитуда,  $\omega$  – частота затухающих колебаний,  $T = 2\pi/\omega$  – период затухающих колебаний,  $\beta$  – коэффициент затухания.

Физический смысл  $\beta$ : это величина, обратная времени  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз ( $\beta = 1/\tau$ ). Соответственно  $\tau$  называют временем релаксации.

Если  $\omega_0^2 \leq \beta^2$ , то колебания не возникают, а система, выведенная из равновесия, медленно возвращается к исходному состоянию.

Декремент затухания  $D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$ , где  $A(t)$  и  $A(t+T)$  – амплитуды колебаний, разделенных во времени периодом колебаний  $T$ .

Логарифмический декремент затухания  $\theta = \ln D = \beta T = \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N}$ , где  $N$  – число колебаний, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Важной характеристикой колебательной системы является добротность  $Q$ , определяемая как  $Q = 2\pi \frac{W}{E}$ , где  $W$  – полная энергия колебательной системы,  $E$  – энергия, растрчиваемая системой за одно колебание.

Для идеальной колебательной системы ( $E=0$ ) добротность стремится к бесконечности. Можно показать, что для малых затуханий  $Q = \frac{\pi}{\theta}$ .

Процесс разряда конденсатора, предварительно заряженного зарядом  $q_m$ , через катушку индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.19)$$

где  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ ,  $\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$ ,  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

При выполнении условия  $\omega_0^2 > \beta^2$  в контуре происходят затухающие колебания, а решение уравнения (3.19) имеет вид

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.20)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , величины  $q_m$  и  $\varphi_0$  определяются начальными условиями.

Если  $\omega_0^2 \leq \beta^2$ , происходит апериодический разряд конденсатора, а колебания не возникают. При  $\omega_0^2 = \beta^2$  имеет место критический режим. Критическое сопротивление  $R_k = 2\sqrt{L/C}$ .

Напряжение на обкладках конденсатора и ток в контуре изменяются по законам:

$$U = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.21)$$

$$I = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \psi), \quad (4.22)$$

где  $U_m = \frac{q_m}{C}$ ,  $I_m = \omega_0 q_m$ ,  $\cos \psi = -\frac{\beta}{\omega_0}$ ,  $\sin \psi = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Движение в среде с коэффициентом сопротивления  $r$  тела массой  $m$ , прикрепленного к невесомой пружине с коэффициентом упругости  $k$ , под действием внешней вынуждающей силы  $F = F_m \cos \omega t$ , совершающей гармонические колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $F_m$ , описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos \omega t, \quad (4.23)$$

где  $\beta = \frac{r}{2m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Установившиеся вынужденные колебания тела также гармонические с той же частотой  $\omega$ :

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.24)$$

где  $A = \frac{F_m/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$  и  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

При  $\omega = 0$  получается, что  $\varphi(0) = 0$ ,  $A(0) = A_0 = \frac{F_m}{m\omega_0^2} = \frac{F_m}{k}$  – статическое смещение тела из положения равновесия под действием постоянной силы  $F = F_m$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда  $A(\omega) \rightarrow 0$ .

В случае установившихся вынужденных гармонических колебаний амплитуда смещения достигает максимума при циклической частоте колебаний

$$\omega_{PE3} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (4.25)$$

Частота  $\omega_{PE3}$  называется резонансной. Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении  $\omega$  к значению  $\omega_{PE3}$  называется явлением резонанса.

Амплитуда при резонансе

$$A_{PE3} = \frac{F_m}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.26)$$

Если на электрический контур (содержащий конденсатор емкостью  $C$ , катушку индуктивностью  $L$  и сопротивление  $R$ ) от внешнего источника подано переменное напряжение  $U = U_m \cos \omega t$ , совершающее гармонические колебания с амплитудой  $U_m$  и частотой  $\omega$ , то изменение с течением

времени заряда  $q(t)$  на обкладках конденсатора описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t, \quad (4.27)$$

где  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания свободных колебаний в контуре,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – циклическая частота свободных незатухающих колебаний (то

есть при  $R=0$ ),  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ ,  $\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$ .

В установившемся режиме  $q(t)$  совершает вынужденные гармонические колебания с той же циклической частотой  $\omega$ :

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi). \quad (4.28)$$

Амплитуда  $q_m$  и начальная фаза  $\psi$  находятся по формулам:

$$q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.29)$$

Подстановка значений  $\omega_0^2$  и  $\beta$  дает:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (4.30)$$

Зависимость от времени силы тока в контуре при установившихся вынужденных колебаниях описывается уравнением

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.31)$$

При этом  $I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ . Выражение (3.31) можно представить

в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.32)$$

где  $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$  – сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением.

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (4.33)$$

Из выражения (4.33) следует, что ток отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ) в том случае, когда  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , и опережает напряжение ( $\varphi < 0$ ) при выполнении условия  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ .



Резонансная циклическая частота  $\omega_{PE3}$ , при которой достигается максимум амплитуды тока при вынужденных колебаниях, не зависит от величины активного сопротивления  $R$ :

$$\omega_{PE3} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.34)$$

Напряжение на активном сопротивлении

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi) = U_{Rm} \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.35)$$

где  $U_{Rm} = RI_m$  – амплитудное значение  $U_R$ . Колебания  $U_R$  происходят в одной фазе с колебаниями  $I$  в контуре.

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.36)$$

где  $U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}$ . Напряжение  $U_C$  отстает по фазе от

силы тока  $I$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Амплитудное значение  $U_{Cm} = R_C I_m$ , где  $R_C = \frac{1}{\omega C}$  – емкостное сопротивление контура (цепи).

Напряжение на катушке индуктивности

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.37)$$

где:  $U_{Lm} = \omega L I_m = R_L I_m$  – амплитудное значение  $U_L$ ;  $R_L = \omega L$  – индуктивное сопротивление цепи. Напряжение  $U_L$  опережает ток в контуре на  $\frac{\pi}{2}$ .

Величина  $R_R = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  называется реактивным сопротивлением цепи,  $R$  – активным сопротивлением,  $R_{\Pi} = \sqrt{R^2 + R_R^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  – полным сопротивлением цепи.

Гармоническое колебание можно изобразить графически в виде вектора  $\vec{A}$ , равномерно вращающегося на плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , равной циклической частоте колебаний. Модуль вектора  $\vec{A}$  равен амплитуде  $A$  рассматриваемых колебаний. Вектор  $\vec{A}$  составляет с горизонтальной осью координат  $OX$  угол  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , равный фазе колебаний в данный момент времени  $t$ . Соответственно проекция  $\vec{A}$  на вертикальную ось  $OY$  совершает гармонические колебания по следующему закону:

$$y = A_y = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4.38)$$

Графическое изображение гармонического колебания при помощи вращающегося вектора называют методом векторных диаграмм.

При помощи этого метода можно осуществить сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний одной частоты  $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01})$  и  $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02})$ . Складывая графически вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , получим вектор  $\vec{A}$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ . Вектор  $\vec{A}$ , проекция которого на ось  $OY$  равна  $y$ , соответствует результирующему колебанию  $y = y_1 + y_2$ :

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4.39)$$

где:  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$  – амплитуда результирующего колебания,  $\varphi_0 = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}$  – начальная фаза результирующего колебания.

Негармонические колебания, получающиеся при наложении двух одинаково направленных колебаний с близкими частотами называются биениями. Пусть  $x_1 = a \cos \omega t$ ,  $x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega)t$ ,  $\Delta\omega \ll \omega$ . Тогда

$$x = x_1 + x_2 = (2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t. \quad (4.40)$$

Во втором множителе пренебрегли членом  $\frac{\Delta\omega}{2}$  по сравнению с  $\omega$ .

За то время, за которое множитель  $\cos \omega t$  совершит несколько полных колебаний, множитель, стоящий в скобках, почти не изменится. Это дает основания рассматривать результирующее колебание (4.40) как гармоническое колебание частоты  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Аналитическое выражение амплитуды имеет вид:

$$A = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (4.41)$$

Это периодическая функция с частотой, в 2 раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля, то есть с частотой  $2\omega$ . Таким образом, частота пульсаций амплитуды, ее называют частотой биений, равна разности частот складываемых колебаний.

Множитель  $2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$  не только определяет амплитуду, но и влияет на фазу колебаний. Это проявляется, например, в том, что отклонения, соответствующие соседним максимумам амплитуды, имеют противоположные знаки.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний одной частоты  $x = a \cos(\omega t + \varphi_0)$  и  $y = b \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$ , совершаемых, например, точкой  $M$ , уравнение траектории результирующего движения в плоскости  $XOY$  можно найти, исключив параметр  $t$  из выражений  $x$  и  $y$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi. \quad (4.42)$$

Траектория представляет собой эллипс, расположенный произвольным образом по отношению к осям координат.

Точка  $M$  описывает этот эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Результирующее движение точки  $M$  называют эллиптически поляризованными колебаниями.

Если  $\Delta\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то оси эллипса совпадают с осями  $OX$  и  $OY$ , а размеры его полуосей равны амплитудам  $a$  и  $b$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.43)$$

Если  $a = b$ , то траектория является окружностью. При знаке «+» точка  $M$  движется по часовой стрелке, при знаке «-» – в противоположном направлении. Такое результирующее движение точки  $M$  называется колебаниями, поляризованными по кругу, или циркулярно поляризованными колебаниями.

В случаях, когда  $\Delta\varphi = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (4.44)$$

Знак «+» соответствует четным значениям  $m$ , то есть сложению синфазных колебаний (прямая расположена в 1-ой и 3-ей четвертях); знак «-» – нечетным значениям  $m$ , то есть сложению колебаний, совершающихся в противофазе (прямая расположена во 2-ой и 4-ой четвертях).

При этом точка  $M$  совершает линейно поляризованные колебания. Она гармонически колеблется с частотой  $\omega$  амплитудой  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  вдоль прямой линии, которая составляет с осью  $OX$  угол  $\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a} \cos m\pi\right)$ .

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с циклическими частотами  $p\omega$  и  $q\omega$ , где  $p$  и  $q$  – целые числа ( $x = a \cos(p\omega t + \varphi_1)$ ,  $y = b \cos(q\omega t + \varphi_2)$ ), значения координат  $x$  и  $y$  колеблющейся точки  $M$  одновременно повторяются через одинаковые промежутки времени  $T_0$ , равные наименьшему общему кратному периодов колебаний вдоль осей  $OX$  и  $OY$ :  $T_1 = 2\pi/p\omega$ ,  $T_2 = 2\pi/q\omega$ . В результате траектория точки  $M$  представляет замкнутую кривую, форма которой зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний. Такие замкнутые траектории называются фигурами Лиссажу.

## 5. Волны

## ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ

1. Понятие о волновых процессах. Характеристики волны. Длина волны. Продольные и поперечные волны. Фронт волны. Волны плоские и сферические. Волновые поверхности. Луч. Уравнение плоской бегущей гармонической волны. Фазовая скорость. Волновое число. Волновой вектор. Уравнение сферической волны.

2. Волновое уравнение Даламбера. Связь скорости волны с характеристиками среды. Колебательная скорость, относительная деформация и напряжение в упругой волне.

3. Энергия упругой волны. Перенос энергии волной. Объемная плотность энергии в волне. Поток энергии. Плотность потока энергии и вектор Умова. Интенсивность волны.

4. Звуковые волны. Акустика. Скорость звука в газе. Звуковое давление и его связь с интенсивностью волны. Высота, тембр, громкость звука и их физические характеристики. Уровень интенсивности звука. Порог слышимости и порог болевого ощущения. Эффект Доплера в акустике.

5. Принцип суперпозиции (наложение волн). Когерентные волны. Интерференция волн. Условия максимумов и минимумов при интерференции.

Стоячие волны. Уравнение стоячей волны. Узлы и пучности смещения. Собственные частоты колебаний натянутой струны.

6. Электромагнитные волны. Волновое уравнение для электромагнитной волны. Уравнение плоской бегущей гармонической электромагнитной волны. Скорость электромагнитных волн. Объемная плотность энергии. Плотность потока энергии. Вектор Умова-Пойнтинга.

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени называется волновым процессом или просто волной. Фронт волны – геометрическое место точек, до которых распространилась волна к данному моменту времени. В зависимости от вида фронта бывают волны плоские, сферические, цилиндрические.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновых поверхностей существует бесчисленное множество. Фронт волны – одна из волновых поверхностей.

Луч – это направление, вдоль которого распространяется волна. Длина волны  $\lambda$  – кратчайшее расстояние вдоль луча между двумя точками, колеблющимися в одной фазе ( $\Delta\varphi = 2\pi$ ).

Волны, распространяющиеся в упругих средах, называют упругими волнами. Вещество при этом не переносится, а частицы среды совершают колебания около своих положений равновесия.

Если колебания происходят вдоль направления распространения волны, волны называются продольными, в перпендикулярном направлении – поперечными.

В твердых средах могут распространяться как поперечные, так и продольные волны, в жидкостях и газах – только продольные (в них отсутствует сопротивление поперечному сдвигу).

Для любого типа волн величина  $\xi = \xi(x, t)$  для момента времени  $t$  определяет смещение колеблющейся точки от положения равновесия, где  $x$  – координата равновесного положения точки (расстояние до источника волны). Явный вид  $\xi(x, t)$  называют уравнением волны.

Уравнение плоской волны, распространяющееся в положительном направлении оси  $Ox$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (5.1)$$

где  $x$  – координата равновесного положения колеблющейся точки,  $A$  – амплитуда волны,  $\omega$  – циклическая частота колебаний,  $v$  – скорость волны.

Для встречной волны, распространяющейся в сторону уменьшающихся значений  $x$ , уравнение имеет вид

$$\xi(x, t) = A \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right).$$

Поскольку  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  – период колебаний), то

$$\xi(x, t) = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right) = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (5.2)$$

где  $\lambda = vT$  – длина волны.

Зафиксируем фазу волны:  $\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = const$ . Это выражение определяет связь между временем  $t$  и координатами  $x$  точек волновой поверхности, соответствующими любому фиксированному значению фазы синусоидальной волны. Продифференцируем полученное выражение:  $dt - \frac{1}{v} dx = 0$ . Отсюда  $v = \frac{dx}{dt} > 0$ . Таким образом, скорость распространения волны  $V$  в уравнениях (5.1) и (5.2) – это скорость распространения фазы, поэтому  $v$  называют фазовой скоростью.

Уравнению плоской волны можно придать вид, симметричный относительно  $x$  и  $t$ . Чтобы это сделать, вводится волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Волновое число трактуют как число длин волн, укладываемых на отрезке  $2\pi$ .

Волновой вектор  $\vec{k}$  – это вектор, модуль которого равен волновому числу, направленный по нормали  $\vec{n}$  к фронту волны, то есть  $\vec{k} = k\vec{n}$ .

Так как  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{v}{v} = \frac{\omega}{\lambda/T} = \frac{\omega}{v}$ , раскрывая скобки в выражении (5.1),

получим уравнение плоской волны в симметричном относительно  $t$  и  $x$  виде

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx). \quad (5.3)$$

Всякий реальный источник волны обладает некоторой протяженностью. Однако если ограничиться рассмотрением волны на расстоянии от источника, значительно превышающим его размеры, то источник можно считать точечным.

В однородной и изотропной среде волна, возбуждаемая источником, будет сферической.

Допустим, фаза колебаний источника равна  $\omega t$ . Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиусом  $r$ , будут колебаться с фазой  $\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) = \omega t - kr$  (чтобы пройти путь  $r$  волне требуется время  $r/v$ ).

Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной – она убывает с расстоянием от источника по закону  $1/r$ .

Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi(r, t) = A(r) \sin \omega\left(t - \frac{r}{v}\right). \quad (5.4)$$

Здесь  $A(r) = \frac{A_0 r_0}{r}$ , где  $r_0$  – минимальное расстояние, на котором источник можно считать точечным, а волну сферической;  $A_0$  – амплитуда колебаний на расстоянии  $r_0$  от источника;  $r$  – расстояние до точки наблюдения.

Уравнение любой волны (плоской или сферической) является решением дифференциального уравнения, которое называется волновым. В общем случае, когда плоская волна распространяется в произвольном направлении и  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ , где  $x$ ,  $y$  и  $z$  – координаты точки наблюдения, волновое уравнение Даламбера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (5.5)$$

где  $v$  – скорость волны.

Для волн, распространяющихся только вдоль оси  $x$  (отсутствует зависимость от координат  $y$  и  $z$ ), получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

В реальной среде скорость зависит от ее свойств и от типа волны.

Распространение продольных волн в тонком упругом стержне связано с его продольным растяжением и сжатием. Соответственно фазовая скорость таких волн

$$v = \sqrt{E/\rho}, \quad (5.7)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня,  $E$  – модуль Юнга.

По определению  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ , где  $\sigma$  – механическое напряжение в стержне ( $\sigma = F/S$ ,  $F$  – сила, приложенная в продольном направлении к незакрепленному концу стержня,  $S$  – площадь его поперечного сечения);  $\varepsilon$  – относительное удлинение стержня ( $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ,  $l$  – первоначальная длина стержня,  $\Delta l$  – удлинение стержня под действием силы  $F$ ).

Фазовая скорость поперечных упругих волн

$$v = \sqrt{G/\rho}, \quad (5.8)$$

где  $G$  – модуль сдвига, характеризующий свойства среды по отношению к деформациям сдвига.

Скорость распространения поперечных волн вдоль струны, то есть вдоль натянутой тонкой гибкой нити или шнура

$$v = \sqrt{F/\rho_l}, \quad (5.9)$$

где  $F$  – сила натяжения струны,  $\rho_l$  – линейная плотность струны ( $\rho_l = m/l$ ,  $m$  и  $l$  – масса и длина струны).

Скорость распространения звуковых волн в газе

$$v = \sqrt{\gamma RT/\mu}.$$

(5.10)

Здесь:  $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура газа;  $\mu$  – его молярная масса (для воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ;  $\gamma = \frac{i+2}{i}$ , где  $i$  – число степеней свободы молекул газа; для воздуха, состоящего в основном из двухатомных газов  $i=5$ , следовательно,  $\gamma=1,4$ ).

Пусть в некоторой среде распространяется продольная волна (5.1)  $\xi = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ . Выделим в среде элемент объемом  $\Delta V$ , настолько малый, что скорость движения и деформацию во всех точках этого объема можно считать одинаковыми и равными соответственно:

$$v = \dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = A\omega \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (5.11)$$

где  $v$  – колебательная скорость частиц среды,  $v_{\max} = \dot{\xi}_{\max} = A\omega$  – амплитудное (максимальное) значение колебательной скорости;

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{A\omega}{v} \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (5.12)$$

где  $\varepsilon$  – относительная деформация выделенного элемента,  $\varepsilon_{\max} = \frac{A\omega}{v}$  – амплитудное (максимальное) значение относительной деформации. При этом механическое напряжение  $\sigma = E\varepsilon$ ,  $\sigma_{\max} = E\varepsilon_{\max}$ .

Из выражений (5.11) и (5.12) следует, что  $|\varepsilon| = \frac{|\dot{\xi}|}{v}$ .

Выделенный элемент объема  $\Delta V$  обладает кинетической энергией

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V, \quad (5.13)$$

где  $\Delta m = \rho \Delta V$  – масса выделенного элемента.

Рассматриваемый элемент обладает потенциальной энергией упругой деформации

$$\Delta W_{\Pi} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V, \quad (5.14)$$

где  $E$  – модуль Юнга среды.

Так как  $v = \sqrt{E/\rho}$  (5.7), то  $E = \rho v^2$ . Тогда  $\Delta W_{\Pi} = \frac{1}{2} \rho v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$ .

Полная энергия выделенного элементарного объема

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_{\Pi} = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V. \quad (5.15)$$

Разделив эту энергию  $\Delta W$  на объем  $\Delta V$ , в котором она содержится, получим объемную плотность энергии  $w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$ :

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (5.16)$$

С учетом выражений (5.11) и (5.12)

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (5.17)$$

В случае поперечной волны  $w$  рассчитывается аналогичным образом.

Из выражения (5.17) следует, что объемная плотность энергии  $w$  каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата косинуса. Среднее значение за период квадрата косинуса равно  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (5.18)$$



Среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительной энергией. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной. Таким образом, волна переносит с собой энергию.

Поток  $d\Phi$  энергии через элементарную поверхность  $dS$  – это физическая величина, численно равная энергии, переносимой через эту поверхность за единицу времени

$$d\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (5.19)$$

Перенос энергии в разных точках пространства характеризуется плотностью потока энергии, численно равной потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данную точку перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия

$$j = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt}. \quad (5.20)$$

Через площадку  $dS_{\perp}$  за время  $dt$  переносится энергия  $dW$ , заключенная в объеме цилиндра с основанием  $dS_{\perp}$  и длиной  $dl = vdt$  ( $v$  – фазовая скорость волны). Поскольку  $dW = wdS_{\perp}vdt$  ( $w$  – объемная плотность энергии), то

$$j = wv. \quad (5.21)$$

Вектор плотности потока энергии (вектор Умова)

$$\vec{j} = w\vec{v}, \quad (5.22)$$

где  $\vec{v}$  – вектор, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны.

Интенсивностью волны  $J$  называется модуль среднего значения вектора Умова:

$$J = \langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (5.23)$$

Выражение (4.22) справедливо для волн любого вида (плоских, сферических, затухающих и т.д.).

Зная плотность потока энергии  $j$  во всех точках произвольной поверхности  $S$ , можно вычислить поток энергии через эту поверхность

$$\Phi = \int_S j_n dS, \quad (5.24)$$

где  $j_n$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на нормаль к элементу поверхности  $dS$ .

Звуковыми (или акустическими) волнами называются упругие волны малой интенсивности, распространяющиеся в упругой среде. Скорость звука в газе рассчитывается по формуле (5.10).

Звуковые волны вызывают у человека звуковые ощущения, если частоты  $\nu$  соответствующих им колебаний лежат в диапазоне от 16 до  $2 \cdot 10^4$  Гц (слышимые звуки). Волны с частотами  $\nu < 16$  Гц называются инфразвуком, а с частотами  $\nu > 2 \cdot 10^4$  Гц – ультразвуком.

Звук, распространяясь в газе (жидкости) создает области сжатия и разрежения, в которых давление соответственно повышено или понижено на  $\Delta p$  по отношению к давлению  $p$  в невозмущенном газе. Величина  $\Delta p$  называется избыточным звуковым давлением или акустическим давлением  $p_{AK}$ . То есть  $p_{AK} = \Delta p$ .

Поскольку газы обладают плохой теплопроводностью, то участки сжатия (где происходит нагрев) и участки разрежения (охлаждение) не успевают обмениваться теплом. Таким образом, имеет место адиабатический процесс, для которого справедливо уравнение

$$pV^\gamma = const, \quad (5.25)$$

где  $p$  – давление газа,  $V$  – занимаемый газом объем, для воздуха  $\gamma = 1,4$ .

Продифференцируем выражение (5.25) по  $V$ :  $\frac{dp}{dV}V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} = 0$ . Отсюда  $\frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V}$ . Следовательно,  $dp = -\frac{\gamma p}{V}dV$ , где  $p$  – давление в невозмущенном газе,  $V$  – объем элементарного участка газа (малого по сравнению с длиной волны).

Очевидно, что  $dp \approx \Delta p$ , а относительное изменение объема  $\frac{dV}{V}$  может быть заменено относительным смещением частиц  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Тогда  $\Delta p = -\gamma p \frac{d\xi}{\partial x}$ .

С учетом выражения (5.12)

$$\Delta p = \frac{\gamma p A \omega}{v} \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (5.26)$$

Так как  $pV = \frac{m}{\mu} RT$  ( $m$  – масса газа), то  $\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{m} = \frac{p}{\rho}$  (где  $\rho = \frac{m}{V}$  – плотность газа). Следовательно, согласно выражению (5.10),  $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ , откуда  $\gamma p = v^2 \rho$ . В результате

$$p_{AK} = \Delta p = \rho v A \omega \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (5.27)$$

Соотношение  $p_{AK} = \rho v \dot{\xi}$  является строгим лишь для бесконечно малых деформаций.

Амплитудой избыточного звукового давления (акустического давления) является величина  $P_{\max} = \rho v A \omega$ . Она зависит как от характеристик среды ( $\rho, v$ ), так и от характеристик самой волны ( $A, \omega$ ). Произведение  $\rho v = R_{AK}$ , зависящее только от свойств среды, называется акустическим сопротивлением (измеряется в акустических Омах). Тогда  $P_{\max} = R_{AK} A \omega$ . Интенсивность  $J$  плоской звуковой волны в газе связана с амплитудой акустического (звукового) давления:  $J = \frac{P_{\max}^2}{2\rho v}$ .

При переходе звуковой волны из одной среды в другую частота  $\omega$  и амплитуда избыточного давления  $P_{\max}$  остаются постоянными. Так как при этом изменяется  $R_{AK}$ , то изменяется амплитуда колебаний  $A$ . При переходе звука из менее плотной среды в более плотную, амплитуда  $A$  уменьшается во столько раз, во сколько увеличивается акустическое (звуковое, волновое) сопротивление.

Интенсивность звука в данной точке – это интенсивность звуковой волны  $J$ , определяемая по формуле (5.23). Минимальное значение интенсивности на пороге слышимости  $J_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ . Уровень сигнала  $L$ , измеряемый в децибеллах, рассчитывается следующим образом:

$$L = 10 \lg \frac{J}{J_0}, \quad (5.28)$$

где  $J$  – интенсивность волны на расстоянии  $r$  от источника.

Мощность точечного источника:

$$N = JS, \quad (5.29)$$

где  $J$  – интенсивность сферической волны на расстоянии  $r$  от источника,  $S = 4\pi r^2$  – площадь сферы радиусом  $r$ .

Когда источник и приемник звука неподвижны относительно среды, в которой распространяется звук, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте  $\nu_0$  колебаний источника.

Доплер установил, что частота  $\nu$  воспринимаемого звука зависит как от скорости движения источника (относительно среды), так и от скорости движения наблюдателя (приемника): она выше частоты  $\nu_0$  источника, если наблюдатель и источник сближаются, и ниже  $\nu_0$ , если они удаляются (эффект Доплера).

Пусть источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника  $v_{II}$  и скорость приемника  $v_{II}$  относительно среды считаются положительными (берутся со знаком «+»), если приемник и источник сближаются, и отрицательными (берутся со знаком «-»), если они удаляются. Тогда

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + v_{II}/v}{1 - v_{II}/v}, \quad (5.30)$$

где  $v$  – скорость звуковой волны. При этом нужно учитывать указанное выше правило знаков для  $v_{II}$  и  $v_{II}$ .

Принцип суперпозиции, установленный опытным путем, заключается в том, что волны от разных источников, накладываясь друг на друга, не изменяют друг друга.

Явление интерференции состоит в таком наложении 2-х (и более) волн, которое приводит к стационарному (не зависящему от времени) усилению

колебаний частиц среды в одних местах и ослаблению (или полному погашению) в других местах пространства.

В пространстве всегда найдутся такие точки, в которых разность фаз складываемых колебаний составляет  $2m\pi$  ( $m$  – целое). В этих точках будет устойчивое усиление колебаний. Там, где разность фаз равна  $(2m+1)\pi$ , будет ослабление. В результате имеет место интерференционная картина – чередование участков с усиленными колебаниями частиц и участков, где колебания частиц ослаблены.

Интерференционная картина возникает только при наложении таких волн, которые имеют одинаковую частоту, постоянную во времени разность фаз в каждой точке пространства и создают в каждой точке колебания вдоль одной прямой. Волны, удовлетворяющие этим условиям, и источники, их создающие, называются когерентными.

Простейший случай интерференции наблюдается при наложении бегущей и отраженной волн. Эти волны когерентны. Их наложение приводит к образованию так называемой стоячей волны.

Результат  $\xi = \xi_1 + \xi_2$  наложения двух плоских волн  $\xi_1 = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  и  $\xi_2 = A \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right)$ , распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ , называют уравнением стоячей волны

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \omega t. \quad (5.31)$$

Выражение (5.31) показывает, что в стоячей волне все точки среды одновременно проходят положения равновесия ( $\sin \omega t = 0$ ) и одновременно достигают своих наибольших отклонений ( $\sin \omega t = \pm 1$ ).

Амплитуда колебаний частиц в стоячей волне зависит от их координаты  $x$ , но не зависит от времени:

$$A_{CT} = 2A \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|. \quad (5.32)$$

Знак модуля – так как амплитуда всегда величина положительная.

В стоячей волне имеются точки, называемые узлами смещения, которые все время остаются неподвижными. Положения этих точек определяются из условия

$$A_{CT} = 2A \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 0, \text{ или } \cos \left| \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 0. \quad (5.33)$$

Это уравнение удовлетворяется при значениях аргумента  $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm \pi \left( m + \frac{1}{2} \right)$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Отсюда координаты узлов смещения

$$x_{взл} = \pm \frac{\lambda}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right). \quad (5.34)$$

Расстояние между двумя соседними узлами равно  $\lambda/2$ .

Точки волны, колеблющиеся с наибольшими амплитудами, называют пучностями смещений. Их координаты находятся из условия

$$A_{CT} = 2A \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 2A, \text{ или } \cos \left| \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 1. \quad (5.35)$$

Это уравнение удовлетворяется при значениях аргумента  $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm m\pi$ . Отсюда координаты узлов пучностей смещения

$$x_{пуч} = \pm m \frac{\lambda}{2}. \quad (5.36)$$

Расстояние между двумя соседними пучностями равно  $\lambda/2$ .

В упругой стоячей волне энергия периодически преобразуется из потенциальной энергии, локализованной в основном вблизи пучностей деформации (узлов смещения), в кинетическую, локализованную в основном вблизи пучностей скорости (пучностей смещения), и обратно.

Среднее за период значение плотности потока энергии равно нулю в любой точке стоячей волны, так как две бегущие волны, образующие стоячую, переносят за период в прямо противоположных направлениях равные количества энергии. Поэтому стоячие волны и получили свое название.

В случае свободных колебаний струн в них устанавливаются стоячие волны, частоты которых могут принимать только определенные дискретные значения, называемые собственными частотами колебаний.

На жестко закрепленных концах струн располагаются узлы смещения.

Если  $l$  – длина струны,  $v$  – фазовая скорость волны, а  $\lambda$  – ее длина, то для струн, закрепленных на обоих концах, на длине  $l$  укладывается целое число длин стоячей волны  $\lambda_{CT} = \lambda/2$ :

$$l = m\lambda_{CT} = m\lambda/2, \quad (5.37)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Собственные частоты колебаний такой системы

$$\nu = \frac{mv}{2l}. \quad (5.38)$$

Электромагнитными волнами называются возмущения электромагнитного поля (переменное электромагнитное поле), распространяющиеся в пространстве.

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла, используя которые получают следующие волновые уравнения, неразрывно связанные друг с другом:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (5.39)$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  –

магнитная проницаемость среды,  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света в вакууме.

Решениями уравнений (5.39) являются

$$\vec{E} = \vec{E}_{MAX} \sin \omega \left( t - \frac{x}{V} \right), \quad \vec{H} = \vec{H}_{MAX} \sin \omega \left( t - \frac{x}{V} \right), \quad (5.40)$$

где, в соответствии с выражением (5.5), скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (5.41)$$

Таким образом, переменное электромагнитное поле действительно распространяется в пространстве в виде волн с фазовой скоростью  $v$ , рассчитываемой по формуле (5.41).

Электромагнитные волны – волны поперечные. Вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны (оси  $x$ ), то есть к вектору ее скорости  $\vec{V}$  в рассматриваемой точке поля. Их амплитудные значения связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_{MAX} = \sqrt{\mu \mu_0} H_{MAX}, \quad (5.42)$$

которые справедливы для любой бегущей электромагнитной волны.

При этом колебания электрической и магнитной составляющих происходят в одинаковых фазах, они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

Вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны, так что  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  (или ось  $Ox$ ) образуют правовинтовую систему (правую тройку векторов).

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность потока энергии рассчитывается по формуле (5.21).

Плотность энергии  $w$  электромагнитного поля складывается из плотностей энергий электрического и магнитного полей  $w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}$ . В

каждый момент времени  $w_E = w_H$ , поэтому  $E \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H \sqrt{\mu \mu_0}$ . Так как  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ,

$$\text{то } w = 2w_E = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E \cdot \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} EH = \frac{EH}{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}} = \frac{EH}{v}.$$

С учетом выражения (5.21) для модуля вектора плотности потока энергии электромагнитной волны, который называется вектором Умова-Пойнтинга  $\vec{P}$  (иногда его называют вектором Пойнтинга) получаем

$$P = EH. \quad (5.43)$$

Так как направление вектора  $[\vec{E}\vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен  $EH$ , то  $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики : Кн. 1,2,4,5. – М.: Наука. Физматлит, 1998 (и более поздние издания).
2. Детлаф, А.А. Курс общей физики / А.А.Детлаф, Б.М.Яворский; – М.: Высшая школа, 1989 (и более поздние издания).
3. Андреев, А.Д. Физика. Электрический ток: конспект лекций / А.Д.Андреев, Л.М.Черных; СПбГУТ. – СПб., 2005.
4. Андреев, А.Д. Физика. Магнетизм: конспект лекций / А.Д.Андреев, Л.М.Черных; СПбГУТ. – СПб., 2009.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

В контрольную работу №2 включены задачи из разделов «Электрический ток», «Магнетизм», «Электромагнетизм», «Колебания», «Волны».

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. По проводнику длиной  $l = 40$  м и площадью поперечного сечения  $S = 4$  мм<sup>2</sup> протекает ток. Напряженность электрического поля в проводнике возрастает со временем  $E(t) = 1,2 \cdot 10^{-4} t$  (В/см). Концентрация свободных электронов в проводнике  $n = 1,12 \cdot 10^{23}$  см<sup>-3</sup>, их подвижность  $\mu = 3,5 \cdot 10^{-3}$  (м<sup>2</sup>/Вс). Найти: зависимость от времени скорости  $v$  упорядоченного движения электронов и плотности тока  $j$  в проводнике; заряд  $q$ , прошедший через поперечное сечение проводника и количество теплоты  $Q$ , выделившееся в проводнике за промежуток времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 5$  с; объемную плотность  $w$  тепловой мощности в момент времени  $t_2$ . Каково предельное значение тока  $I_{\text{пред}}$ , который может протекать по данному проводнику, если известно, что в 1 см<sup>3</sup> его за одну минуту не должно выделяться количество теплоты, большее чем  $Q_{\text{пред}} = 96$  Дж.

Дано:  $l = 40 \text{ м}$ ,  $S = 4 \text{ мм}^2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $E(t) = 1,2 \cdot 10^{-4} t \text{ (В/см)} = 1,2 \cdot 10^{-2} t \text{ (В/м)}$ ,  
 $n = 1,12 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3} = 1,12 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$ ,  $\mu = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2/\text{Вс)}$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 5 \text{ с}$ ,  $V_1 = 1$   
 $\text{см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$ ,  $\square t_1 = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$ ,  $Q_{\text{ПРЕД}} = 96 \text{ Дж}$ .

Найти:  $v(t)$ ,  $j(t)$ ,  $q$ ,  $Q$ ,  $w(t_2)$ ,  $I_{\text{ПРЕД}}$ .

Решение.

С учетом выражений (1.3), (1.4) и (1.12) удельная электрическая проводимость материала проводника

$$\sigma = en\mu = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,12 \cdot 10^{29} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 6,27 \cdot 10^7 \text{ 1/Ом}\cdot\text{м},$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  – модуль заряда электрона. Удельное электрическое сопротивление

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{6,27 \cdot 10^7} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}.$$

Скорость упорядоченного движения свободных электронов в проводнике

$$v(t) = \mu \cdot E(t) = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} t = 4,2 \cdot 10^{-5} t \text{ (м/с)}.$$

Зависимость плотности тока в проводнике от времени найдем из закона Ома в дифференциальной форме (1.4):

$$j(t) = \sigma E(t) = 6,27 \cdot 10^7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} t = 7,5 \cdot 10^5 t \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

В момент времени  $t_2$  скорость электронов и плотность тока равны

$$v(t_2) = 4,2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}; \quad j(t_2) = 7,5 \cdot 10^5 \cdot 5 = 3,75 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2.$$

Зависимость плотности тока от  $t$  можно было найти также по формуле

$$j(t) = env(t) = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,12 \cdot 10^{29} \cdot 4,2 \cdot 10^{-5} t = 7,5 \cdot 10^5 t \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

Сила тока в проводнике находится следующим образом:

$$I(t) = j(t)S = 7,5 \cdot 10^5 t \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 3t \text{ (А)}.$$

За промежуток времени от  $t$  до  $t+dt$ , настолько малый, что в течение него ток можно считать постоянным, прошедший через поперечное сечение проводника заряд равен

$$dq = I(t)dt.$$

Конечный промежуток времени разбиваем на указанные выше бесконечно малые промежутки, находим заряды, прошедшие за каждый такой промежуток и суммируем их. Такая операция сводится к интегрированию тока по промежутку времени:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = \int_0^5 3tdt = 3 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 3 \frac{5^2}{2} = 37,5 \text{ (Кл)}.$$

Далее найдем сопротивление  $R$  проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 1,6 \cdot 10^{-8} \frac{40}{4 \cdot 10^{-6}} = 0,16 \text{ (Ом)}.$$



Количество теплоты, выделившееся в проводнике за малый промежуток времени, согласно закону Джоуля-Ленца рассчитывается по формуле

$$dQ = I^2(t) R dt .$$

Количество теплоты, выделившееся в проводнике за конечный промежуток времени, найдем, проинтегрировав это выражение по этому промежутку:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt = \int_0^5 9t^2 \cdot 0,16 dt = 1,44 \int_0^5 t^2 dt = 1,44 \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^5 = 1,44 \frac{5^3}{3} = 60 \text{ Дж} .$$

Удельную тепловую мощность тока найдем из закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$w(t) = \rho j^2(t) = 1,6 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5^2 \cdot 10^{10} t^2 = 9 \cdot 10^3 t^2 \text{ (Вм/м}^3\text{)} .$$

Тогда  $w(t_2) = 9 \cdot 10^3 \cdot 5^2 = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Вм/м}^3$ .

Количество теплоты, выделившееся за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , можно также найти, используя удельную мощность тока. Учитывая, что по определению удельная тепловая мощность тока

$$w = \frac{dQ}{dV dt} = \frac{dQ}{V dt} ,$$

где  $dQ$  - количество теплоты, выделившееся в объеме  $dV$  проводника за время  $dt$  (так как проводник однородный, т. е. его свойства одинаковы во всем объеме, то бесконечно малый объем  $dV$  можно заменить на конечный объем  $V$ ). Из последнего выражения следует, что за малый промежуток времени от  $t$  до  $t + dt$  в проводнике выделяется количество теплоты

$$dQ = V w(t) dt .$$

За промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  в проводнике выделится количество теплоты

$$Q = V \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt .$$

Расчет:

$$V = Sl = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 ;$$

$$Q = 1,6 \cdot 10^{-4} \int_0^5 9 \cdot 10^3 t^2 dt = 1,44 \int_0^5 t^2 dt = 1,44 \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^5 = 1,44 \frac{5^3}{3} = 60 \text{ Дж} .$$

Чтобы найти ответ на последний вопрос задачи, найдем предельную удельную мощность тока, которая не может быть превышена:

$$w_{\text{ПРЕД}} = \frac{Q_{\text{ПРЕД}}}{V_1 t_1} = \frac{96}{10^{-6} \cdot 60} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ Вм/м}^3 .$$

При этом предельная плотность тока

$$j_{\text{ПРЕД}} = \sqrt{\frac{w_{\text{ПРЕД}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-8}}} = 10^7 \text{ А/м}^2 .$$

Предельная сила тока

$$I_{\text{ПРЕД}} = j_{\text{ПРЕД}} S = 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 40 \text{ А}.$$

Ответы:  $v(t) = 4,2 \cdot 10^{-5} t$  ( $\text{м/с}$ );  $j(t) = 7,5 \cdot 10^5 t$  ( $\text{А/м}^2$ );  $q = 37,5$  Кл;  $Q = 60$  Дж;

$$I_{\text{ПРЕД}} = 40 \text{ А}.$$

2. В соленоиде длиной  $l = 1$  м с плотной намоткой из провода диаметром  $d = 1$  мм течет ток силой  $I = 10$  А. Альфа-частица (масса  $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$  кг, заряд  $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл), ускоренная разностью потенциалов  $U = 100$  В, влетает в магнитное поле соленоида под углом  $60^\circ$  к линиям магнитной индукции. Найти: радиус и шаг винтовой линии, по которой движется частица; число оборотов, которое она совершит внутри соленоида.

Дано:  $l = 1$  м;  $d = 1$  мм  $= 10^{-3}$  м;  $I = 10$  А;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $U = 100$  В;  $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$  кг;  $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $\mu = 1$ .

Найти:  $R$ ,  $h$ ,  $N$ .

Решение.

Согласно закону сохранения энергии  $qU = \frac{mv^2}{2}$ , где  $v$  – скорость

частицы. Отсюда  $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{6,6 \cdot 10^{-27}}} = 10^5$  м/с. С учетом выражения

(2.13) индукция магнитного поля соленоида  $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 n I$ ,  $n = \frac{N_C}{l} = \frac{1}{d}$ , где

$N_C$  – число витков соленоида. Тогда  $B = \frac{\mu\mu_0 I}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{10^{-3}} = 4\pi \cdot 10^{-3}$  Тл.

Радиус винтовой линии рассчитывается по формуле (2.5):

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^5 \cdot \sqrt{3}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi \cdot 10^{-3} \cdot 2} = 0,14 \text{ м}.$$

Период обращения:  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v_{\perp}}{v_{\perp} q B} = \frac{2\pi m}{q B} = \frac{2\pi \cdot 6,6 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi \cdot 10^{-3}} = 10^{-5}$  с.

Шаг винтовой линии:  $h = v \cos \alpha \cdot T = 10^5 \cdot 0,5 \cdot 10^{-5} = 0,5$  м.

Число оборотов, сделанное частицей внутри соленоида:  $N = \frac{l}{h} = \frac{1}{0,5} = 2$ .

Ответы:  $R = 0,14$  м;  $h = 0,5$  м;  $N = 2$ .

3. Бесконечно длинный провод с током  $I_1 = 5$  А согнут под прямым углом и расположен в плоскости чертежа. На расстоянии  $a = 14$  см от вершины угла на его биссектрисе перпендикулярно плоскости чертежа расположен второй длинный провод с током  $I_2 = 4$  А. Определить напряженность магнитного поля в точке С, расположенной на биссектрисе угла на расстоянии  $\frac{a}{2}$  от его вершины.

Дано:  $I_1 = 5$  А,  $I_2 = 4$  А,  $a = 14$  см  $= 0,14$  м,  $\mu = 1$ .

Найти:  $H_C$ .

Решение.

Каждый из полубесконечных отрезков провода с током  $I_1$  создает в точке наблюдения магнитное поле с векторами напряженности, равными по модулю  $H_{1/2}$ , перпендикулярными плоскости чертежа и направленными в одну сторону (в зависимости от направления тока: либо за чертеж, либо от него).

С учетом формулы (2.8),  $H_{1/2} = \frac{I_1}{4\pi r_1} \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \pi \right)$ , где  $r_1$  – кратчайшее расстояние от каждого из полубесконечных отрезков до точки наблюдения (расстояние от вершины угла до основания перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на любой из отрезков). Оно находится следующим образом:

$$r_1 = \frac{a}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \quad \text{Тогда} \quad H_1 = 2H_{1/2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,14 \cdot \sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = 27,4 \text{ А/м}.$$

При этом вектор  $\vec{H}_1$  перпендикулярен плоскости чертежа.

Модуль напряженности  $H_2$  магнитного поля, создаваемого вторым проводом в точке  $C$ , рассчитывается по формуле  $H_2 = \frac{I_2}{4\pi r_2} (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha'_2)$ ,

где  $r_2 = \frac{a}{2} = 0,07 \text{ м}$  – расстояние от второго провода до точки  $C$ ;  $\alpha'_1 = 0$ ,  $\alpha'_2 = \pi$

. Тогда  $H_2 = \frac{1}{4 \cdot 3,14} \cdot \frac{4}{0,07} (1 + 1) = 9,1 \text{ А/м}$ . Вектор  $\vec{H}_2$  лежит в плоскости чертежа, начинается в точке  $C$  и направлен по касательной к окружности радиусом  $r_2$  (в ту или иную сторону в зависимости от направления тока  $I_2$ ), проведенной из второго провода.

По принципу суперпозиции  $\vec{H}_C = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ . Так как вектора  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  взаимно перпендикулярны, то  $H_C = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{27,4^2 + 9,1^2} = 28,9 \text{ А/м}$ .

Ответ:  $H_C = 28,9 \text{ А/м}$

4. Бесконечно длинный прямой провод и прямоугольный контур расположены в одной плоскости. Стороны контура:  $a = 0,05 \text{ м}$ ,  $b = 0,10 \text{ м}$ . Стороны  $b$  параллельны проводу, стороны  $a$  – перпендикулярны. Расстояние от ближайшей к проводу стороны  $b$  равно  $c = 0,05 \text{ м}$ . Определить взаимную индуктивность контура и провода. Найти заряд, индуцированный в контуре, если ток  $I_1 = 3 \text{ А}$ , протекающий по проводу, в некоторый момент времени исчезает. Сопротивление контура  $R = 3 \text{ Ом}$ .

Дано:  $a = 0,05 \text{ м}$ ,  $b = 0,10 \text{ м}$ ,  $c = 0,05 \text{ м}$ ,  $I_1 = 3 \text{ А}$ ,  $R = 3 \text{ Ом}$ ,  $\mu = 1$ .

Найти:  $L_{21}$ ,  $q$ .

Решение.

Взаимная индуктивность находится из выражения (3.10):  $\psi_2 = L_{21}I_1$ . Присвоим контуру индекс 2. Тогда  $\psi_2 = N_2\Phi_2$ , где  $N_2 = 1$  – число витков в контуре,  $\Phi_2$  – магнитный поток через плоскую поверхность  $S$ , ограниченную контуром. Во всех точках  $S$  вектор  $\vec{B}$  индукции магнитного поля, создаваемого током  $I_1$ , направлен по нормали к ней.

Выделим на поверхности  $S$  узкую полоску, параллельную сторонам  $b$ , находящуюся на расстоянии  $x$  от провода и толщиной  $dx$ . Для всех точек этой полоски, площадь которой  $dS = bdx$ , с учетом выражения (2.8.1) можно считать, что  $B = B_n = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi x}$ . Тогда элементарный поток через полоску  $dS$  рассчитывается следующим образом:

$$d\Phi_2 = B_n dS = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi x} bdx.$$

Поток через  $S$  находится интегрированием (с учетом того, что  $I_1 = const$ ):

$$\Phi_2 = \int_c^{c+a} \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi x} bdx = \frac{\mu\mu_0 I_1 b}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln x \Big|_c^{c+a} = \frac{\mu\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} = \frac{\mu\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} \cdot I_1.$$

Коэффициент пропорциональности при  $I_1$  – это и есть взаимная индуктивность  $L_{21}$ .

$$\text{Следовательно, } L_{21} = \frac{\mu\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-1}}{2\pi} \ln \frac{0,05+0,05}{0,05} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

Индуктированный заряд рассчитывается по формуле (3.4). Для рассматриваемого случая ее можно представить в виде  $q = \frac{\Phi_2' - \Phi_2''}{R}$ , где  $\Phi_2' = \Phi_2$ ,  $\Phi_2'' = 0$ . Тогда

$$q = \frac{\mu\mu_0 I_1 b}{2\pi R} \ln \frac{c+a}{c} = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-1}}{2\pi \cdot 3} \ln \frac{0,05+0,05}{0,05} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

Ответы:  $L_{12} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}$ ,  $q = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ .

5. С поперечным сечением ( $S = 250 \text{ см}^2$ ) соленоида связано потокосцепление  $\psi = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ . Длина соленоида  $l = 0,8 \text{ м}$ , число витков  $N = 800$ , сопротивление  $R = 10 \text{ Ом}$ . Найти энергию магнитного поля соленоида и ее объемную плотность. Определить время, в течение которого при отключении источника тока напряженность магнитного поля убывает в два раза.

Дано:  $\psi = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ ,  $S = 250 \text{ см}^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ,  $l = 0,8 \text{ м}$ ,  $N = 800$ ,  $\frac{H_0}{H_1} = 2$ ,  $\mu = 1$ .

Найти:  $W_0$ ,  $w_0$ ,  $t_1$ .

### Решение.

Индуктивность длинного соленоида (3.6):  $L = \mu\mu_0 n^2 V$ . Число витков, приходящееся на единицу длины соленоида:  $n = \frac{N}{l} = \frac{800}{0,8} = 10^3 \text{ м}^{-1}$ .

Объем соленоида:  $V = Sl = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$ .

Тогда  $L = 1 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$ . Ток, текущий по обмотке соленоида, находим из выражения (3.5):

$$I_0 = \frac{\Psi}{L} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 0,2 \text{ А}.$$

Энергия магнитного поля соленоида рассчитывается по формуле (3.13):

$$W_0 = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2^2}{2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Объемная плотность энергии  $w_0 = \frac{W_0}{V} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^3$ .

Объемную плотность энергии можно также найти, используя выражение (3.14). Так как для соленоида  $H = nI$  (2.13), то  $H_0 = nI_0 = 10^3 \cdot 0,2 = 200 \text{ А/м}$ .

Согласно (3.14),  $w_0 = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{2} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 200^2}{2} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^3$ .

При выключении источника тока ток в контуре убывает по закону (3.8):

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В соответствии с этим,  $H = H_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ . Отсюда  $H_1 = H_0 e^{-\frac{R}{L}t_1}$ . Логарифмируя, получим:  $\ln \frac{H_0}{H_1} = \frac{R}{L}t_1$ . Следовательно,  $t_1 = \frac{L}{R} \ln \frac{H_0}{H_1} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{10} \ln 2 = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

Ответы:  $W_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$ ,  $w_0 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^3$ ,  $t_1 = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

6. Шарик массой  $10 \text{ г}$ , подвешенный к невесомой пружине, совершает незатухающие гармонические колебания с частотой  $0,5 \text{ Гц}$  и амплитудой  $2,0 \text{ см}$ ; начальная фаза равна  $\frac{\pi}{6}$ . Написать уравнение колебаний. Определить скорость шарика в тот момент, когда смещение от положения равновесия равно половине максимального. Определить потенциальную и кинетическую энергии в момент времени  $t_2 = \frac{T}{12}$ , где  $T$  – период колебаний.

Дано:  $m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг}$ ,  $\nu = 0,5 \text{ Гц}$ ,  $A = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $x_1 = \frac{A}{2}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $t_2 = \frac{T}{12}$ .

Найти:  $x(t)$ ,  $v_1$ ,  $W_{\text{п2}}$ ,  $W_{\text{к2}}$ .

Решение.

Уравнение гармонического колебания имеет вид:  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , где циклическая частота  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ рад/с}$ . Уравнение колебаний в явном виде:

$$x(t) = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right), \text{ м.}$$

Фаза колебаний в момент времени  $t_1$  находится следующим образом:

$$x_1 = \frac{A}{2} = A \sin\left(\pi t_1 + \frac{\pi}{6}\right) = A \sin \varphi_1, \quad \text{где } \varphi_1 = \pi t_1 + \frac{\pi}{6}, \quad \text{где } \varphi_1 = \pi t_1 + \frac{\pi}{6}. \quad \text{Отсюда}$$
$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6}. \quad \text{Скорость шарика } v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \quad \text{Тогда:}$$

$$v_1 = A\omega \cos \varphi_1 = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Потенциальная энергия  $W_{п} = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$ , где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Тогда

$$W_{п2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (3,14)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Кинетическая энергия  $W_{к} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$ . Тогда для момента времени  $t_2$ :

$$W_{к2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (3,14)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Ответы:  $x(t) = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ , м;  $v_1 = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ ,  $W_{п2} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ ,  $W_{к2} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ .

7. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $0,2 \text{ мкФ}$  и катушки индуктивностью  $5,0 \text{ мГн}$ . При каких значениях логарифмического декремента затухания и сопротивления цепи энергия контура уменьшится в 10 раз за три полных колебания?

Дано:  $C = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $L = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $N = 3$ ,  $t_1 = NT$ ,  $\frac{W_0}{W_N} = 10$ .

Найти:  $\theta$ ,  $R$ .

Решение.

Энергия колебательного контура пропорциональна квадрату амплитуды заряда. Следовательно, за три полных колебания амплитуда заряда уменьшится в  $\sqrt{10}$  раз. Поэтому  $\frac{q_0}{q_0 e^{-\beta t_1}} = \frac{q_0}{q_0 e^{-\beta 3T}} = \sqrt{10}$ , отсюда  $e^{\beta 3T} = \sqrt{10}$ .

Известно, что логарифмический декремент затухания  $\theta = \beta T$ , где  $\beta$  – коэффициент затухания,  $T$  – период колебаний. Тогда  $e^{3\theta} = \sqrt{10}$ . Логарифмируя, получим  $3\theta = \ln \sqrt{10}$ . Таким образом,  $\theta = \frac{\ln 10}{2 \cdot 3} = 0,38$ .

Для нахождения сопротивления  $R$  необходимо знать коэффициент затухания  $\beta$ . Согласно выражению (4.19),  $\beta = \frac{R}{2L}$ , следовательно,  $R = 2\beta L$ .

Составим систему из 5-ти уравнений с 5-тью неизвестными  $R, \beta, T, \omega$ ,  $\omega_0$ :  $R = 2\beta L$ ;  $\theta = \beta T$ ;  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ;  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Решая эту систему, получим выражение для расчета  $R$ :

$$R = \frac{2\theta L}{\sqrt{(4\pi^2 + \theta^2)LC}} = \frac{2 \cdot 0,38 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(4 \cdot 3,14^2 + 0,38^2)5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}} = 19 \text{ Ом}.$$

Ответы:  $\theta = 0,38$ ,  $R = 19 \text{ Ом}$ .

8. Материальная точка массой  $10 \text{ г}$  закреплена на конце одной из 2-х соединенных друг с другом одинаковых пружин жесткостью  $1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$  каждая. Пружины подвешены в вертикальном положении. В начальный момент времени одну пружину растягивают на  $2 \text{ см}$ , а другую сжимают на  $1 \text{ см}$  и отпускают. Написать уравнение результирующего колебания материальной точки. Массой пружин пренебречь.

Дано:  $m = 0,01 \text{ кг}$ ,  $k = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ ,  $a_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $a_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Найти:  $x(t)$ .

### Решение.

Материальная точка участвует в двух гармонических колебаниях одной частоты и одинакового направления:  $x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ , где, как известно,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{0,01}} = 10 \text{ с}^{-1}$ . Начальные фазы колебаний  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются из начальных условий:  $x_1(0) = 2 \cdot 10^{-2} \cos \varphi_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  ( $> 0$  – растяжение). Отсюда  $\varphi_1 = 0$ .  $x_2(0) = 10^{-2} \cos \varphi_2 = -10^{-2} \text{ м}$  ( $< 0$  – сжатие). Отсюда  $\varphi_2 = \pi$ .

Таким образом, уравнения складываемых колебаний имеют вид:  $x_1 = 2 \cdot 10^{-2} \cos 10t$  (м),  $x_2 = 10^{-2} \cos(10t + \pi)$  (м). Результирующее колебание:  $x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 10^{-2} \sqrt{1 + 4 + 4 \cos \pi} = 10^{-2} \text{ м}$ .  $\text{tg } \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} = \frac{2 \sin 0 + 1 \sin \pi}{2 \cos 0 + 1 \cos \pi} = 0$ . Отсюда  $\varphi = 0$ . Подставив

найденные значения  $a$  и  $\varphi$  в выражение для  $x$ , получим равнение результирующего колебания:  $x(t) = 10^{-2} \cos 10t$ , м.

Ответ:  $x(t) = 10^{-2} \cos 10t$ , м.

9. В стальном стержне распространяется плоская продольная волна от источника, имеющего частоту  $10^2$  Гц и амплитуду 4 мкм. Модуль Юнга стали  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, плотность  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Написать уравнение волны.

Определить максимальную колебательную скорость частиц, относительную деформацию и напряжение в стержне.

Дано:  $\nu = 10^2$  Гц,  $A = 4 \cdot 10^{-6}$  м,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Найти:  $\xi(x, t)$ ,  $\xi'_{\max}$ ,  $\varepsilon_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$ .

### Решение

Напишем уравнение плоской волны в общем виде:  $\xi(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ ,

где  $\xi(x, t)$  – смещение от положения равновесия точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $\omega$  – циклическая частота колебаний;  $v$  – скорость распространения волны в среде.

Определим циклическую частоту и скорость распространения волны:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \omega = 2 \cdot 10^2 \pi \text{ рад/с}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Напишем уравнение волны в стальном стержне. Подставим заданные величины в системе СИ:  $\xi(x, t) = 4 \cdot 10^{-6} \sin 2 \cdot 10^2 \pi \left( t - \frac{x}{5 \cdot 10^3} \right)$ .

Колебательная скорость  $\xi'$  частиц среды в волне равна частной производной от смещения  $\xi$  по времени:  $\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial t} = A\omega \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ .

Максимальная колебательная скорость  $\xi'_{\max} = A\omega = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^2 \pi = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м/с.

Относительная деформация  $\varepsilon$  в стержне равна частной производной от смещения  $\xi$  по координате  $x$ :  $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{A\omega}{v} \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ . Максимальная

относительная деформация  $\varepsilon_{\max} = \frac{A\omega}{v} = \frac{\xi'_{\max}}{v} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-7}$ . Максимальное напряжение в стержне  $\sigma_{\max} = E\varepsilon_{\max} = 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 10^5$  Н/м<sup>2</sup>.

Ответы:  $\xi(x, t) = 4 \cdot 10^{-6} \sin 2 \cdot 10^2 \pi \left( t - \frac{x}{5 \cdot 10^3} \right)$ ,  $\xi'_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м/с,  $\varepsilon_{\max} = 5 \cdot 10^{-7}$ ,  $\sigma_{\max} = 10^5$  Н/м<sup>2</sup>.

10. Частота источника волн 400 Гц. На расстоянии 50 см от источника волну можно считать сферической; амплитуда колебаний частиц воздуха



на этом расстоянии равна  $3 \cdot 10^{-3}$  мкМ. Температура воздуха  $17^\circ\text{C}$ , плотность воздуха  $1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Написать уравнение сферической волны. Определить уровень сигнала на расстоянии 2 м от источника и мощность источника.

Дано:  $\nu = 400 \text{ Гц}$ ,  $r_0 = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$ ,  $a_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мкМ} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ,  $T = 273 + 17 = 290 \text{ К}$ ,  $\rho = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $r = 2 \text{ м}$ .

Найти:  $\xi(x, t)$ ,  $L$ ,  $N$ .

### Решение

Уравнение сферической волны имеет вид:  $\xi(x, t) = \frac{a_0 r_0}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ ,

где  $r_0$  – расстояние от источника, на котором волну можно считать сферической;  $a_0$  – амплитуда колебаний частиц на расстоянии  $r_0$ ;  $v$  – скорость распространения волны;  $\omega$  – циклическая частота колебаний;  $\xi$  – смещение от положения равновесия частицы с координатой  $r$  в момент времени  $t$ .

Определим циклическую частоту:  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 400 = 8 \cdot 10^2 \pi \text{ рад/с}$ .

Скорость распространения волны в газе:  $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ , где для воздуха

$\gamma = 1,4$ ,  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ,  $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – универсальная газовая постоянная.

Расчет:  $v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 3,4 \cdot 10^2 \text{ м/с}$ . Следовательно, уравнение волны имеет вид:

$$\xi(x, t) = \frac{1,5 \cdot 10^{-9}}{r} \sin 8 \cdot 10^2 \pi \left( t - \frac{r}{3,4 \cdot 10^2} \right), \text{ м.}$$

Уровень сигнала определяется по формуле  $L = 10 \lg \frac{J}{J_0}$  (5.28), где  $J$  – интенсивность волны на расстоянии  $r$  от источника,  $J_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$  – минимальное значение интенсивности на пороге слышимости. Учитывая выражение (5.23), определим интенсивность волны на расстоянии 2 м:

$$J = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \left( \frac{1,5 \cdot 10^{-9}}{2} \right)^2 \cdot (8 \cdot 10^2 \pi)^2 \cdot 3,4 \cdot 10^2 = 7,3 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Тогда  $L = 10 \lg \frac{7,3 \cdot 10^{-10}}{10^{-12}} = 28,6 \text{ дБ}$ .

Мощность точечного источника рассчитывается по формуле (5.29):  $N = JS$ , где  $J$  – интенсивность сферической волны на расстоянии  $r$  от источника,  $S = 4\pi r^2$  – площадь сферы радиусом  $r$ .

Тогда  $N = J \cdot 4\pi r^2 = 7,3 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 2^2 = 3,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}$ .

Ответы:  $L = 28,6 \text{ дБ}$ ,  $N = 3,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}$ ,  $\xi(x, t) = \frac{1,5 \cdot 10^{-9}}{r} \sin 800\pi \left( t - \frac{r}{3,4 \cdot 10^2} \right) \text{ м.}$

## ЗАДАЧИ

В таблице приведены номера вариантов и задач. Например, к варианту № 5 относятся задачи: 2.3; 2.14; 2.23; 2.31; 2.47; 2.52; 2.69; 2.73; 2.90.

№ вар-та	Номера задач								
0	2.4	2.15	2.27	2.33	2.41	2.53	2.67	2.80	2.87
1	2.7	2.11	2.21	2.37	2.46	2.55	2.70	2.77	2.81
2	2.10	2.17	2.29	2.35	2.43	2.60	2.65	2.72	2.83
3	2.1	2.12	2.24	2.40	2.49	2.57	2.63	2.75	2.88
4	2.6	2.19	2.30	2.39	2.44	2.51	2.68	2.79	2.84
5	2.3	2.14	2.23	2.31	2.47	2.52	2.69	2.73	2.90
6	2.8	2.20	2.28	2.34	2.42	2.58	2.62	2.78	2.86
7	2.2	2.16	2.25	2.38	2.50	2.54	2.66	2.71	2.82
8	2.9	2.13	2.22	2.32	2.48	2.59	2.64	2.76	2.89
9	2.5	2.18	2.26	2.36	2.45	2.56	2.61	2.74	2.85

### Примечания.

1. В задачах, в которых рассматривается магнитное поле, магнитная проницаемость среды  $\mu = 1$ .

2. Если в задаче речь идет о соленоиде, то применимы формулы для бесконечно длинного соленоида. Если рассматриваются прямые провода с током, создающим магнитное поле, то их следует считать бесконечно длинными.

3. Рисунки к задачам приведены на стр. 62.

4. На рис. 1 символ  $\otimes$  означает, что ток в прямом проводе течет от наблюдателя.

2.1. По проводу длиной  $l = 10 \text{ м}$ , площадь поперечного сечения которого  $S = 1 \text{ мм}^2$ , течет ток, плотность которого меняется со временем согласно выражению  $j = 12t^2$ ,  $\text{А/см}^2$ . Концентрация электронов в проводе  $n = 2,5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , их подвижность  $\mu = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ . Найти: заряд  $q$ , прошедший через сечение провода за промежуток времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 4 \text{ с}$ ; количество теплоты  $Q$ , выделившееся в проводе за этот промежуток времени; скорость упорядоченного движения электронов  $v$  в момент времени  $t_2 = 4 \text{ с}$ .

2.2. Напряжение между концами проводника линейно возрастает со временем:  $U = 0,2t$ , В. Длина проводника  $4 \text{ м}$ , площадь его поперечного сечения  $2 \text{ мм}^2$ . За одну минуту в проводе выделилось количество теплоты  $36 \text{ Дж}$ . Найти: удельное сопротивление  $\rho$  материала проводника; заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за одну минуту, начиная с  $t_1 = 0$ ; плотность тока в проводнике через одну минуту после начала отсчета времени.

2.3. Скорость упорядоченного движения электронов в проводе меняется со временем согласно уравнению  $v = 4 \cdot 10^{-5} t, \text{ м/с}$ . Удельное сопротивление металла  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ , концентрация свободных электронов  $2,5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , площадь поперечного сечения провода  $5 \text{ мм}^2$ . Найти: заряд, прошедший через поперечное сечение провода за промежуток времени от  $2 \text{ с}$  до  $4 \text{ с}$ ; напряженность электрического поля  $E$  в проводе в момент времени, равный  $2 \text{ с}$ ; зависимость удельной тепловой мощности тока  $w$  от времени.

2.4. Напряженность поля в проводнике меняется со временем согласно уравнению  $E = 1,6 \cdot 10^{-3}, \text{ В/м}$ . Площадь поперечного сечения проводника  $2 \text{ мм}^2$ , подвижность свободных электронов  $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . В момент времени, равный  $3 \text{ с}$ , плотность тока в проводе была равна  $9 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2$ . Найти: концентрацию электронов в проводнике; заряд, прошедший через сечение проводника за промежуток времени от  $0$  до  $3 \text{ с}$ ; зависимость удельной тепловой мощности тока  $w$  от времени.

2.5. В  $10 \text{ см}^3$  проводника за  $5 \text{ минут}$  выделилось количество теплоты равное  $1,50 \text{ кДж}$  при прохождении постоянного тока. Плотность тока в проводнике  $1,0 \text{ А/мм}^2$ . Напряжение между концами проводника  $50 \text{ В}$ . Найти: удельную тепловую мощность тока; напряженность поля и силу тока в проводнике; заряд, прошедший через сечение проводника за  $5 \text{ минут}$ .

2.6. К источника тока с ЭДС  $\varepsilon = 12 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 2 \text{ Ом}$  присоединена катушка из провода длиной  $40 \text{ м}$  и поперечным сечением  $2 \text{ мм}^2$ . Удельное сопротивление материала проводника  $5 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Найти: удельную тепловую мощность тока; плотность тока и напряженность поля в проводе; удельную тепловую мощность тока  $w$  в проводе и количество теплоты, выделяющееся в  $1 \text{ см}^3$  провода за одну минуту.

2.7. Напряжение между концами проводника меняется с течением времени:  $U = 2t, \text{ В}$ . За промежуток времени от  $0$  до  $3 \text{ с}$  через поперечное сечение проводника прошел заряд  $45 \text{ Кл}$ . Длина проводника  $10 \text{ м}$ , подвижность свободных электронов в нем  $10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . Найти: количество теплоты, выделившееся за промежуток времени от  $0$  до  $3 \text{ с}$ ; зависимость скорости упорядоченного движения электронов от времени.

2.8. К источнику тока с ЭДС  $5,5 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $1 \text{ Ом}$  подключили катушку с намотанным проводом длиной  $20 \text{ м}$  и площадью поперечного сечения  $1 \text{ мм}^2$ . По цепи пошел ток  $0,5 \text{ А}$ . Найти: удельное сопротивление материала провода; напряженность и плотность тока в проводе; удельную тепловую мощность тока в проводе.

2.9. Удельная тепловая мощность тока в проводнике меняется со временем:  $w = 1,6 \cdot 10^2 t^2, \text{Вт}/\text{м}^3$ . Концентрация свободных электронов в проводнике  $2,5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ ; их подвижность  $10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . Найти: плотность тока и напряженность электрического поля в проводнике в момент времени, равный  $5 \text{ с}$ ; количество теплоты, выделившееся в объеме  $30 \text{ см}^3$  проводника за первые  $10 \text{ с}$ .

2.10. Мощность тока, идущая на тепловые потери в проводнике объемом  $200 \text{ см}^3$ , растет со временем:  $N = 0,05 t^4, \text{Вт}$ . Концентрация свободных электронов в проводнике  $2,5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , их подвижность  $10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . Найти: напряженность поля и скорость упорядоченного движения свободных электронов в проводнике в момент времени, равный  $10 \text{ с}$ ; зависимость плотности тока от времени.

2.11. Электроны влетают в однородное магнитное поле под углом  $60^\circ$  к силовым линиям и движутся по винтовой траектории, радиус которой равен  $0,34 \text{ см}$ . На сколько переместятся электроны вдоль силовых линий за  $10$  оборотов?

2.12. Протон ( $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ) движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с радиусом  $1 \text{ мм}$  и шагом  $5 \text{ мм}$ . Индукция поля  $0,1 \text{ Тл}$ . Найти скорость протона и угол между ней и индукцией.

2.13. Протон ( $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ) влетает со скоростью  $100 \text{ км}/\text{с}$  в область пространства, где имеются электрическое ( $E = 210 \text{ В}/\text{м}$ ) и магнитное ( $B = 3,3 \text{ мТл}$ ) поля, совпадающие по направлению. Определить ускорение протона для двух случаев: 1) направление скорости совпадает с направлением полей; 2) направление скорости перпендикулярно направлению полей.

2.14. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $104 \text{ В}$  и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ( $E = 10 \text{ кВ}/\text{м}$ ) и магнитное ( $B = 0,1 \text{ Тл}$ ) поля. Найти отношение заряда частицы к её массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не изменяет величины и направления скорости.

2.15. Альфа-частица (масса  $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , заряд  $q = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ) движется в однородном магнитном поле с  $H = 9,5 \cdot 10^5 \text{ А}/\text{м}$  по окружности с  $R = 25 \text{ см}$  в плоскости, перпендикулярной силовым линиям. Определить: скорость частицы; период обращения частицы по окружности.

2.16. Пластина полупроводника толщиной  $a = 0,4 \text{ см}$  помещена в магнитное поле, направленное вдоль  $a$ . Перпендикулярно полю вдоль пластины течет ток  $I = 0,2 \text{ А}$ . При этом возникает поперечная разность потен-

циалов  $U = 6 \text{ мВ}$  (эффект Холла). Подвижность носителей тока  $0,6 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ ; удельное сопротивление полупроводника  $10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Определить индукцию магнитного поля.

2.17. Через сечение  $S = a \times b$  медной пластинки толщиной  $a = 0,5 \text{ мм}$  и высотой  $b = 10 \text{ мм}$  идет ток  $20 \text{ А}$ . При помещении пластинки в магнитное поле, перпендикулярное ребру  $b$  и направлению тока, возникает поперечная разность потенциалов  $3,1 \text{ мкВ}$ . Индукция магнитного поля  $1 \text{ Тл}$ . Определить: 1) концентрацию электронов в меди; 2) среднюю скорость направленного движения электронов.

2.18. На боковых гранях медной пластинки, помещенной в однородное магнитное поле с индукцией  $0,32 \text{ Тл}$ , в результате эффекта Холла возникает разность потенциалов  $10^{-6} \text{ В}$ . Длина пластинки  $5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , ширина  $0,5 \text{ см}$ , толщина  $0,15 \text{ мм}$ . Для меди концентрация электронов  $8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ , удельное сопротивление  $1,7 \cdot 10^{-8}$ . Найти подвижность электронов и силу тока, текущего по пластинке.

2.19. В магнитное поле с индукцией  $0,2 \text{ Тл}$  помещена пленка шириной  $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  и толщиной  $10^{-4} \text{ м}$ , по которой протекает ток  $4,8 \text{ А}$ . Концентрация электронов в пленке  $10^{29} \text{ м}^{-3}$ . Определить холловскую разность потенциалов и скорость упорядоченного движения электронов.

2.20. Пластинка полупроводника с удельным сопротивлением  $10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$  и толщиной  $a = 0,2 \text{ мм}$  помещена в магнитное поле индукцией  $1 \text{ Тл}$ , направленное вдоль  $a$ . Вдоль пластинки перпендикулярно полю пропускается ток  $0,1 \text{ А}$ . При этом возникает поперечная разность потенциалов  $3,25 \cdot 10^{-3} \text{ В}$  (эффект Холла). Определить подвижность носителей тока в полупроводнике.

2.21. По двум длинным параллельным проводам, расположенным на расстоянии  $10 \text{ см}$  один от другого, в одинаковых направлениях текут токи  $I_1 = 2 \text{ А}$  и  $I_2$ . Индукция магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $10 \text{ см}$  от каждого из проводов,  $B = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ . Определить силу тока во втором проводнике  $I_2$ .

2.22. Длинный провод, согнутый под прямым углом, и круговой контур, состоящий из пяти витков, расположены в одной плоскости (рис. 1). Магнитный момент контура  $p_m = 0,028 \text{ А} \cdot \text{мм}^2$  перпендикулярен плоскости чертежа. Центр кругового тока  $I_2$  находится на биссектрисе прямого угла. Радиус контура  $R = 6 \text{ см}$ ;  $a = 10 \text{ см}$ ;  $I_1 = 10 \text{ А}$ . Найти напряженность магнитного поля в центре кругового контура. Укажите направление тока  $I_2$ .

2.23. Квадратный проводящий контур вписан в круговой проводящий контур (рис. 2). По круговому контуру течет ток  $2 \text{ А}$ , по квадратному – ток  $3 \text{ А}$ . Радиус кругового контура  $20 \text{ см}$ . Определить индукцию магнитного поля в точке  $O$ .

2.24. Квадратный контур и круговой контур с радиусом  $R = 5 \text{ см}$  расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 3). Магнитный момент кругового контура  $0,0314 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . По квадратному контуру течет ток  $I_1$ . Напряженность магнитного поля в центре системы (точка  $O$ )  $H_O = 54 \text{ А/м}$ . Определить силу тока  $I_1$  в квадратном контуре.

2.25. Прямой бесконечный проводник имеет круговую петлю (рис. 4). По проводнику течет ток  $5 \text{ А}$ , напряженность магнитного поля в центре петли  $41 \text{ А/м}$ . Определить магнитный момент петли с током.

2.26. По длинному соленоиду течет ток  $0,1 \text{ А}$ . Радиус соленоида  $2 \text{ см}$ , линейная плотность витков  $10^3 \text{ м}^{-1}$ . Внутри соленоида круговой виток радиусом  $1 \text{ см}$  расположен так, что ось соленоида проходит через плоскость витка и его центр. Ток витка  $1 \text{ А}$ . Найти величину напряженности магнитного поля в центре витка.

2.27. По длинному соленоиду течет ток  $0,1 \text{ А}$ . Радиус соленоида  $2 \text{ см}$ , линейная плотность витков  $10^3 \text{ м}^{-1}$ . С осью соленоида совпадает ось провода с током  $2 \text{ А}$ . Найти напряженность поля в точке, находящейся на расстоянии  $1 \text{ см}$  от оси провода, отсчитываемом вдоль радиуса соленоида.

2.28. По бесконечному проводу течет ток  $10 \text{ А}$ . В плоскости, перпендикулярной проводу, расположен контур в виде равностороннего треугольника с током  $1 \text{ А}$ . Сторона треугольника  $2 \text{ см}$ . Определить напряженность магнитного поля в центре контура, находящегося на расстоянии  $5 \text{ см}$  от провода.

2.29. По бесконечному проводу течет ток  $10 \text{ А}$ . В плоскости, перпендикулярной проводу, расположен контур в виде кругового витка с током  $1 \text{ А}$ . Радиус витка  $1 \text{ см}$ , его центр находится на расстоянии  $5 \text{ см}$  от провода. Найти величину напряженности магнитного поля в центре витка.

2.30. По бесконечному проводу течет ток  $10 \text{ А}$ . В плоскости, перпендикулярной проводу, расположен контур в виде квадрата со стороной  $2 \text{ см}$  и током  $1 \text{ А}$ . Расстояние от центра квадрата до провода  $5 \text{ см}$ . Определить напряженность магнитного поля в центре квадрата.

2.31. Внутри длинного соленоида с плотностью витков  $n = 5 \text{ см}^{-1}$  находится рамка с площадью  $S_0 = 10 \text{ см}^2$  и числом витков  $N = 1000$ . Рамка равномерно вращается с частотой  $\nu = 10 \text{ Гц}$  относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной силовым линиям магнитного поля соленоида. Ток в соленоиде  $I_1 = 2 \text{ А}$ , сопротивление рамки  $R = 5 \text{ Ом}$ . Определить: силу тока  $I_2$  в рамке в момент времени  $t_2 = \frac{T}{4} \text{ с}$ ; заряд, прошедший по рамке за промежуток времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2$ .

2.32. Круговой проводящий контур находится в однородном магнитном поле, индукция которого меняется во времени по закону  $B = 5 \cdot 10^{-3} t^2$ , Тл. Радиус контура  $2 \text{ см}$ . Сопротивление контура  $10 \text{ Ом}$ . Угол между

направлением вектора  $\vec{B}$  и плоскостью контура  $\alpha = 30^\circ$ . Найти: 1) заряд, прошедший по контуру за промежуток времени от  $t_1 = 2$  с до  $t_2 = 4$  с; 2) ток в контуре в момент времени  $t_2$ .

2.33. Внутри длинного соленоида с линейной плотностью витков  $n = 20$  см<sup>-1</sup> расположена прямоугольная рамка, состоящая из пяти витков со сторонами 7 см и 10 см. Нормаль к рамке составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с силовыми линиями магнитного поля. По соленоиду течет ток, изменяющийся во времени по закону  $I = 0,04t^2$ , А. Сопротивление рамки 2 Ом. Определить: 1) индукционный ток в рамке в момент времени  $t' = 3$  с; 2) заряд, прошедший по рамке за промежуток времени от  $t_1 = 2$  с до  $t_2 = 4$  с.

2.34. Рамка площадью 100 см<sup>2</sup> содержит  $10^3$  витков провода сопротивлением  $R_1 = 12$  Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление  $R_2 = 20$  Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B = 0,1$  Тл), делая 8 оборотов в секунду. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Чему равно максимальное значение мощности переменного тока в цепи?

2.35. Бесконечно длинный прямой провод с током  $I$  и прямоугольный контур расположены так, как показано на рис. 5. При выключении тока в проводе по контуру протекает заряд  $2,1 \cdot 10^{-8}$  Кл. Определить начальное значение тока в проводе. Показать направление индукционного тока в контуре. Сопротивление контура 2 Ом.

2.36. Две катушки имеют взаимную индуктивность  $L_{12} = L_{21} = 5$  мГн. В первой катушке сила тока изменяется по закону  $I_1(t) = 10 \sin 100\pi t$ , А. Найти 1) максимальное значение ЭДС, индуцируемой во второй катушке; 2) силу тока  $I_2$  во второй катушке в момент времени  $t' = \frac{T}{6}$ . Сопротивление второй катушки 5 Ом.

2.37. Взаимная индуктивность двух контуров  $L_{12} = L_{21} = 0,05$  Гн. При изменении тока  $I_1$  в первом контуре во втором возникает ЭДС, которая изменяется во времени по закону  $\varepsilon_2 = 0,5t$ , В. Найти: 1) силу тока  $I_1$  в первом контуре в момент времени  $t_2 = 2$  с; 2) магнитный поток  $\psi_2$ , сцепленный со вторым контуром в момент времени  $t_2$ , считая, что при  $t_1 = 0$   $\psi_2 = 0$ .

2.38. По длинному прямому проводу течет ток, изменяющийся со временем по закону  $I = 0,3t^2 + 1$ , А. В одной плоскости с проводом расположен прямоугольный контур (рис. 5), где:  $a = c = 20$  см,  $b = 30$  см. Определить: 1) взаимную индуктивность провода и контура; 2) ЭДС, индуцируемую в контуре в момент времени, равный 3 с.

2.39. По длинному прямому проводу течет ток  $I_1 = 1$  А. По квадратному контуру течет ток  $I_2$  (рис. 6). Контур удаляется за пределы действия магнитного поля провода. При этом совершается работа  $A = 42$  нДж.  $b = 10$

см,  $a = 30$  см. Определить ток во втором контуре  $I_2$ , а также взаимную индуктивность провода и контура.

2.40. Соленоид имеет  $1,2 \cdot 10^4$  витков. Длина соленоида 60 см, радиус витков 4 см. Сверху на соленоид надета катушка из 10 витков, расположенная в его середине. Длина катушки значительно меньше длины соленоида. Определить взаимную индуктивность катушки и соленоида.

2.41. По круговому контуру с числом витков 10 и радиусом 4 см течет ток  $I$ . Магнитный момент контура  $0,1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Плоскость контура составляет угол  $\alpha_1 = 30^\circ$  с линиями однородного магнитного поля с индукцией  $0,126 \text{ мТл}$ . Определить: напряженность магнитного поля в центре контура; работу, совершаемую при повороте контура из заданного положения в положение, при котором угол между плоскостью контура и направлением силовых линий магнитного поля  $\alpha_2 = 60^\circ$ .

2.42. Рамка, длиной 5 см и шириной 2 см, содержащая 200 витков проволоки, находится в однородном магнитном поле с индукцией  $0,1 \text{ Тл}$ . Плоскость рамки составляет угол  $30^\circ$  с направлением вектора магнитной индукции. По рамке течет ток  $2 \text{ мА}$ . Определить: магнитный момент рамки; вращающий момент, действующий на рамку; работу, совершаемую при удалении рамки за пределы действия магнитного поля.

2.43. По длинному соленоиду с плотностью витков  $n = 20 \text{ см}^{-1}$  течет ток  $I_1 = 0,5 \text{ А}$ . Внутри соленоида расположен квадратный контур из 10 витков. Сторона контура  $a = 3 \text{ см}$ . Магнитный момент контура  $p_m = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Плоскость составляет угол  $30^\circ$  с силовыми линиями магнитного поля соленоида. Определить: силу тока  $I_2$  в контуре; вращающий момент, действующий на контур; работу, совершаемую при повороте контура в положение, при котором магнитный поток максимален.

2.44. Квадратный контур и длинный прямой провод расположены в одной плоскости (рис. 6). Магнитный момент контура  $p_m = 0,04 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .  $I_1 = 3 \text{ А}$ ,  $a = b = 10 \text{ см}$ . Контур поворачивают на  $180^\circ$  вокруг оси, параллельной току  $I_1$  и проходящей через середину контура. Определить совершенную при повороте работу.

2.45. Длинный прямой провод и прямоугольный контур расположены, как показано на рис. 7. Контур перемещается из положения, в котором  $b = 5 \text{ см}$ , в положение, в котором  $b = 10 \text{ см}$ . При этом совершается работа  $23 \text{ нДж}$ . Ток  $I_1 = 2 \text{ А}$ ,  $c = 5 \text{ см}$ ,  $a = 10 \text{ см}$ . Определить  $I_2$ .

2.46. По катушке с индуктивностью  $0,1 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $20 \text{ Ом}$  течет ток  $5 \text{ А}$ . Источник тока можно отключить, не разрывая цепи. Определить энергию магнитного поля катушки через  $\Delta t = 0,01 \text{ с}$  после отключения источника.



2.47. Соленоид индуктивностью  $0,2 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$  замыкается на источник, ЭДС которого  $2 \text{ В}$ , а внутреннее сопротивление ничтожно мало. Какой заряд пройдет через соленоид за первые  $5 \text{ с}$  после замыкания?

2.48. По соленоиду с индуктивностью  $0,1 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $10 \text{ Ом}$  течет постоянный ток. Концы соленоида отсоединяют от источника и замыкают накоротко. За какой промежуток времени в соленоиде выделится количество теплоты, равное половине первоначального значения энергии магнитного поля соленоида?

2.49. Длинный соленоид содержит  $800$  витков с радиусом  $2,5 \text{ см}$ , Длина соленоида  $40 \text{ см}$ . Сила тока в соленоиде меняется со временем по закону  $I(t) = 5 \sin \frac{\pi}{2} t$ ,  $A$ . Определить: индуктивность соленоида, максимальные значения напряженности магнитного поля в соленоиде и магнитного потока, сцепленного с витками соленоида, ЭДС самоиндукции и объемную плотность энергии магнитного поля в момент времени, равный  $0,5 \text{ с}$ .

2.50. При изменении силы тока в контуре по закону  $I = 5t^2 + 2$  ( $A$ ), в нем возникает ЭДС, которая в момент времени  $t_1 = 2 \text{ с}$  равна  $2 \text{ В}$ . Определить энергию магнитного поля  $W_1$  в этот момент.

2.51. Материальная точка совершает колебания по закону  $x = 5 \sin 2t$ ,  $см$ . Максимальная сила, действующая на точку, равна  $4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ . Определить: массу материальной точки, полную энергию точки и путь, пройденный точкой за  $10$  полных колебаний.

2.52. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки массой  $40 \text{ г}$  равна  $2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Максимальная скорость  $0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Написать уравнение колебаний, считая, что в начальный момент времени смещение от положения равновесия равно половине амплитуды. Определить силу, действующую на материальную точку, в момент времени  $t_1 = \frac{T}{3}$ .

2.53. Период гармонических колебаний материальной точки равен  $8,0 \text{ с}$ . Масса  $5,0 \text{ г}$ . Написать уравнение колебаний точки  $x(t)$ . За начало отсчета времени принять момент времени, когда отклонение от положения равновесия положительно и равно максимальному значению  $4,0 \text{ см}$ . Определить: силу, действующую на точку, кинетическую и потенциальную энергии точки в момент времени  $t_1 = \frac{T}{3}$ .

2.54. Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания,  $4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$ ; максимальное значение силы, действующей на тело,  $2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$ ; частота колебаний  $0,5 \text{ Гц}$ ; начальная фаза колебаний  $60^\circ$ . Написать уравнение колебаний тела. Определить максимальные значения скорости и ускорения тела.

2.55. Материальная точка совершает гармоническое колебание по закону  $x = 4 \sin\left(0,2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ , см. Её полная энергия равна  $1,8 \cdot 10^{-5}$  Дж. Определить массу материальной точки.

2.56. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности  $1,6$  мГн и конденсатора ёмкостью  $0,04$  мкФ. Сопротивление контура ничтожно мало. Максимальное напряжение на конденсаторе  $200$  В. Написать законы изменения заряда на обкладках конденсатора и силы тока в контуре с течением времени. Определить энергию электрического и энергию магнитного поля в момент времени  $t_1 = T/12$ .

2.57. Период незатухающих колебаний в колебательном контуре равен  $10^{-3}$  с. Амплитудное значение силы тока равно  $0,40$  А, индуктивность катушки  $0,05$  Гн. Определить ёмкость конденсатора. Написать закон изменения напряжения на обкладках конденсатора с течением времени. Определить энергию электрического поля в тот момент, когда сила тока равна половине максимального значения. Сопротивлением контура пренебречь.

2.58. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $0,40$  Гн, и конденсатора ёмкостью  $2,5$  мкФ. Полная энергия контура  $2 \cdot 10^{-6}$  Дж. Написать закон изменения силы тока и разности потенциалов на обкладках конденсатора со временем, считая, что в начальный момент времени заряд на конденсаторе максимальный. Сопротивлением контура пренебречь.

2.59. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону  $U = 20 \sin 10^3 t$ , В. Индуктивность контура равна  $2,5$  Гн. Определить ёмкость контура и написать законы изменения с течением времени энергии электрического поля и энергии магнитного поля контура. Сопротивлением контура пренебречь.

2.60. Сила тока в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединённых катушки индуктивностью  $2,0$  Гн и конденсатора, изменяется со временем по закону  $I = 5 \cdot 10^{-3} \sin 2 \cdot 10^3 t$ , А. Определить ёмкость контура, период колебаний в контуре, энергию электрического и магнитного полей в момент времени  $t_1 = T/2$ . Сопротивлением контура пренебречь.

2.61. Уравнение затухающих колебаний материальной точки массой  $20$  г имеет вид:  $x = 4 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-0,2t} \cos \frac{\pi}{4} t$ , м. Определить: коэффициент упругости, коэффициент сопротивления, собственную частоту колебаний, логарифмический декремент затухания и амплитуду колебаний после двух полных колебаний.

2.62. Период затухающих колебаний материальной точки  $4,0 \text{ с}$ . Логарифмический декремент затухания  $1,6$ . В начальный момент времени смещение от положения равновесия максимально и равно  $5,0 \text{ см}$ . Написать уравнение колебаний. За какое время амплитуда колебаний уменьшается на  $20\%$  от первоначального значения?

2.63. Отклонение от положения равновесия материальной точки массой  $200 \text{ г}$  происходит по закону:  $x = 2 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-0,1t} \cdot \cos(0,2t) \text{ м}$ . Определить: собственную частоту колебаний, коэффициент упругости, логарифмический декремент затухания и время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в  $5$  раз.

2.64. В начальный момент времени смещение колеблющейся материальной точки максимально и равно  $8 \text{ см}$ . За  $5$  колебаний амплитуда уменьшается на  $25\%$  от своей первоначальной величины. Период колебаний  $0,5 \text{ с}$ . Определить коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания и написать уравнение колебаний материальной точки.

2.65. Груз массой  $0,40 \text{ кг}$  прикреплен к пружине, коэффициент упругости которой равен  $200 \text{ Н/м}$ . Вынуждающая сила изменяется по закону  $F = 2 \sin 20t, \text{ Н}$ . Написать уравнение установившихся вынужденных колебаний, если известно, что коэффициент сопротивления равен  $0,20 \text{ кг/с}$ .

2.66. Значения параметров колебательного контура следующие:  $C = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $L = 0,5 \text{ Гн}$ ,  $R = 40 \text{ Ом}$ . Амплитуда напряжения на обкладках конденсатора  $10 \text{ В}$ . Определить: период колебаний, коэффициент затухания, добротность контура. На сколько процентов частота свободных колебаний контура отличается от собственной частоты контура? Написать закон изменения напряжения на конденсаторе с течением времени.

2.67. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности  $0,20 \text{ Гн}$ , двух параллельно соединенных конденсаторов емкостью  $4,0 \text{ мкФ}$  каждый и омического сопротивления  $20 \text{ Ом}$ . Начальное напряжение на конденсаторах  $20 \text{ В}$ . Определить период колебаний в контуре; логарифмический декремент затухания; число колебаний, после которых амплитуда напряжения уменьшается в  $10$  раз.

2.68. В последовательном электрическом контуре, содержащем омическое сопротивление, катушку индуктивностью  $1,0 \text{ Гн}$  и конденсатор, происходят затухающие колебания. При этом напряжение на обкладках конденсатора изменяется со временем по закону:  $U_C = 30e^{-1000t} \cos 10^3 t, \text{ В}$ . Определить коэффициент затухания, собственную циклическую частоту колебаний, ёмкость и омическое сопротивление контура. Чему равен начальный заряд на обкладках конденсатора?

2.69. В исходном положении ключа происходит заряд конденсатора ёмкостью  $4,0 \text{ мкФ}$  от источника постоянного напряжения до  $20 \text{ В}$ . В другом положении конденсатор отключен от источника и разряжается через

катушку индуктивностью  $2,5 \text{ Гн}$  с сопротивлением  $25 \text{ Ом}$ . Нарисовать схему опыта. Вычислить коэффициент затухания, циклическую частоту колебаний. Написать, как изменяется заряд конденсатора с течением времени, считая за начало отсчета времени момент переключения ключа.

2.70. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $0,40 \text{ Гн}$ , конденсатора емкостью  $4,0 \text{ мкФ}$  и сопротивления  $160 \text{ Ом}$ . Начальный заряд на конденсаторе равен  $8,0 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$ . Написать закон изменения со временем напряжения на обкладках конденсатора. Определить логарифмический декремент затухания.

2.71. Материальная точка участвует в 2-х колебаниях равных частот и амплитуд и происходящих в одном направлении. Период равен  $2,0 \text{ с}$ . Амплитуды равны  $3,0 \text{ см}$ . Различаются колебания только начальными фазами, которые равны:  $\pi/2$  и  $0$ . Написать уравнение результирующего колебания и сделать рисунок с векторным представлением колебаний.

2.72. Материальная точка участвует в 2-х колебаниях равных частот и амплитуд и происходящих в одном направлении. Период равен  $4,0 \text{ с}$ . Амплитуды равны  $5,0 \text{ см}$ . Различаются колебания только начальными фазами, которые равны:  $\pi/2$  и  $\pi$ . Написать уравнение результирующего колебания и сделать рисунок с векторным представлением колебаний.

2.73. Материальная точка участвует в 2-х колебаниях равных частот и амплитуд и происходящих в одном направлении. Период равен  $8,0 \text{ с}$ . Амплитуды равны  $6,0 \text{ см}$ . Различаются колебания только начальными фазами, которые равны:  $0$  и  $-\pi/2$ . Написать уравнение результирующего колебания и сделать рисунок с векторным представлением колебаний.

2.74. Материальная точка участвует в 2-х колебаниях происходящих в одном направлении. Частоты колебаний равны  $20 \text{ Гц}$ . Амплитуда первого колебания равна  $3,0 \text{ см}$ ; второго –  $4,0 \text{ см}$ . Начальная фаза первого колебания –  $0$ ; второго –  $\pi/2$ . Написать уравнение результирующего колебания и сделать рисунок с векторным представлением колебаний.

2.75. Материальная точка массой  $0,20 \text{ кг}$  участвует в 2-х одинаково направленных колебаниях. Уравнения колебаний:  $x_1 = 4 \cos(3t + 0,4\pi)$ ,  $\text{мм}$ ;  $x_2 = 3 \cos(3t + 0,9\pi)$ ,  $\text{мм}$ . Написать уравнение результирующего колебания. Определить полную энергию материальной точки.

2.76. Движение материальной точки в результате сложения 2-х взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковых частот, амплитуд и отличающихся фазами колебаний на  $\pi/2$  происходит по окружности радиусом  $5 \text{ см}$  с постоянной скоростью  $10 \text{ см/с}$  по часовой

стрелке. Вычислить амплитуду, частоту колебаний и написать уравнения колебаний  $x(t)$  и  $y(t)$  в явном виде.

2.77. Движение материальной точки в результате сложения 2-х взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковых частот, амплитуд и отличающихся фазами колебаний на  $\pi/2$  происходит по окружности радиусом 10 см с постоянной скоростью  $5 \text{ см/с}$  против хода часовой стрелки. Вычислить амплитуду, частоту колебаний и написать уравнения колебаний  $x(t)$  и  $y(t)$  в явном виде.

2.78. На горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа подаются напряжения:

$$U_x = 20 \cos \pi t, \text{ В}; U_y = 10 \cos(\pi t + \varphi_0), \text{ В}.$$

Чувствительность пластин одинакова и равна  $1 \text{ мм/В}$ . Написать уравнение траектории, по которой движется точка от электронного луча на экране осциллографа, для двух случаев: а)  $\varphi_0 = 0$ ; б)  $\varphi_0 = \pi/2$ .

2.79. На горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа подаются напряжения приводящие к отклонению электронного луча по закону  $x(t) = 80 \cos 25t$  (мм) по горизонтали и  $y(t) = 20 \sin 25t$  (мм) по вертикали. Написать уравнение траектории, наблюдаемой на экране осциллографа. Определить скорость точки от электронного луча на экране в момент времени, когда  $x = 0$ .

2.80. На горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа подаются напряжения приводящие к отклонению электронного луча по закону  $x(t) = 4 \cos 2,5t$  (мм) по горизонтали и  $y(t) = 2,5 \sin 2,5t$  (мм) по вертикали. Написать уравнение траектории, наблюдаемой на экране осциллографа. Определить скорость точки от электронного луча на экране в момент времени, когда  $y = 0$ .

2.81. Уравнение незатухающих колебаний дано в виде  $x = 4 \sin \pi t$ , см. Найти смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 75 см от источника колебаний, через 0,01 с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний  $300 \text{ м/с}$ .

2.82. Уравнение незатухающих колебаний дано в виде  $x = \sin 2,5\pi t$ , см. Найти смещение от положения равновесия, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 20 м от источника колебаний, для момента  $t_1 = 1 \text{ с}$  после начала колебаний. Скорость распространения колебаний  $100 \text{ м/с}$ .

2.83. Какую разность фаз будут иметь колебания двух точек, находящихся на расстоянии соответственно 10 и 16 м от источника

колебаний? Период колебаний  $0,04 \text{ с}$ , скорость распространения колебаний  $300 \text{ м/с}$ .

2.84. Найти смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии  $x_1 = \frac{\lambda}{12}$  для момента  $t_1 = \frac{T}{6}$ . Амплитуда колебаний  $0,05 \text{ м}$ .

2.85. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии  $4 \text{ см}$  от источника колебаний, в момент  $t_1 = \frac{T}{6}$  равно половине амплитуды. Найти длину бегущей волны.

2.86. В стальном стержне распространяется бегущая продольная волна от источника, уравнение колебаний которого дано в виде:  $x = 10^{-5} \sin 10^2 t$ ,  $\text{м}$ . Модуль Юнга стали  $2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}$ ; плотность стали  $8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Написать уравнение волны. Определить: длину волны; максимальную относительную деформацию в стержне.

2.87. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид:  $x = 10^{-6} \sin 10^2 t$ ,  $\text{м}$ . Длина волны  $15 \text{ м}$ . Написать уравнение плоской волны. Определить: смещение точки среды, находящейся на расстоянии  $20 \text{ м}$  от источника в момент времени  $0,01 \text{ с}$ ; разность фаз колебаний точек, расположенных на расстоянии  $15 \text{ м}$  и  $20 \text{ м}$  от источника.

2.88. Уравнение плоской волны распространяющейся в стержне сечением  $10 \text{ см}^2$ , имеет вид:  $\xi = 6 \cdot 10^6 \cos(1900t - 5,7x)$ ,  $\text{м}$ . Определить: частоту колебаний; длину волны; скорость распространения волны в стержне. Какую энергию переносит волна через сечение стержня за  $2 \text{ с}$ ? Плотность материала стержня  $4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

2.89. Плоская бегущая акустическая волна представлена уравнением  $\xi(x, t) = 5 \cdot 10^4 \sin(1980t - 6x)$ ,  $\text{м}$ . Определить: частоту колебаний; скорость и длину волны; максимальную относительную деформацию среды.

2.90. Уравнение незатухающих колебаний источника имеет следующий вид:  $x = 10^{-4} \sin 100t$ ,  $\text{см}$ . Длина волны  $20 \text{ м}$ . Написать уравнение плоской волны. Определить ускорение точки, находящейся на расстоянии  $25 \text{ м}$  от источника, в момент времени, равный  $0,2 \text{ с}$ .

Рисунки к задачам

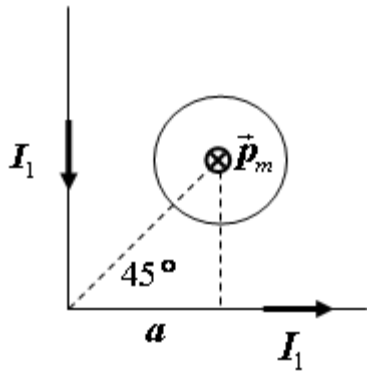


Рис. 1

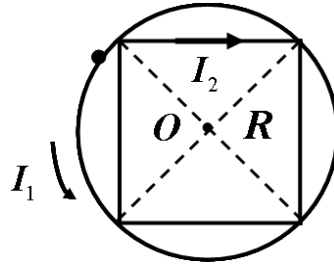


Рис. 2

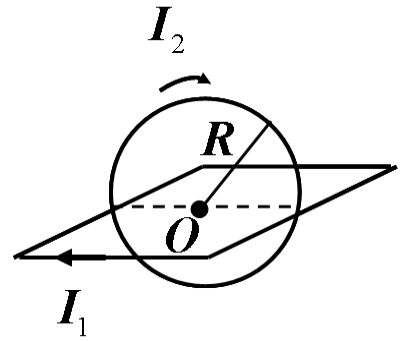


Рис. 3

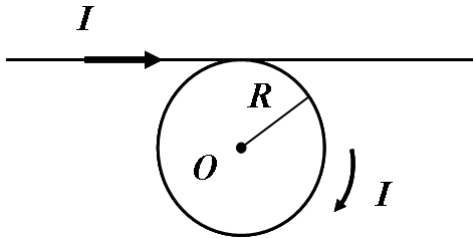


Рис. 4

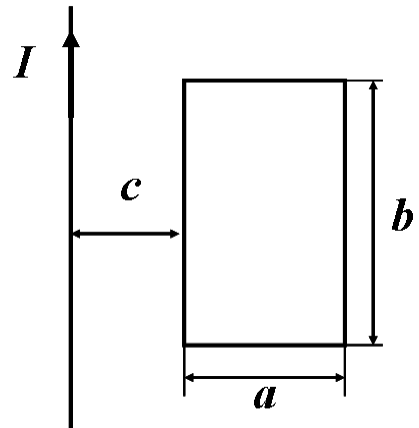


Рис. 5

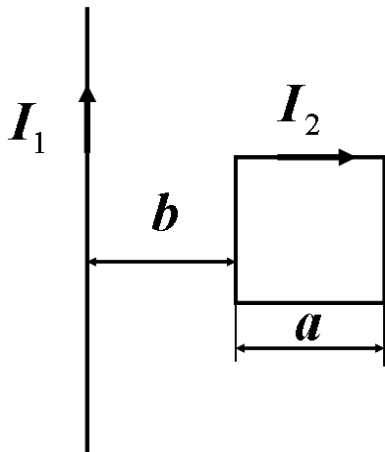


Рис. 6

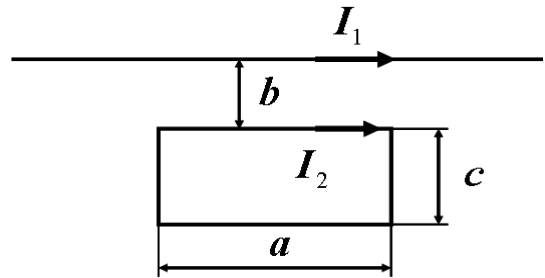


Рис. 7

## СОДЕРЖАНИЕ

Методические указания к выполнению контрольных заданий .....	3
Методические указания к решению задач .....	3
Программа второй части курса физики .....	4
Электрический ток .....	4
Вопросы программы .....	4
Основные определения и формулы .....	4
Магнетизм .....	7
Вопросы программы .....	7
Основные определения и формулы .....	8
Электромагнетизм .....	13
Вопросы программы .....	13
Основные определения и формулы .....	13
Колебания .....	18
Вопросы программы .....	18
Основные определения и формулы .....	18
Волны .....	27
Вопросы программы .....	27
Основные определения и формулы .....	28
Литература .....	38
Контрольная работа № 2 .....	39
Примеры решения задач .....	39
Задачи .....	49
Рисунки к задачам .....	62